

Alexander Stolzenburg

Übungsaufgaben zur

Projektiven

Geometrie

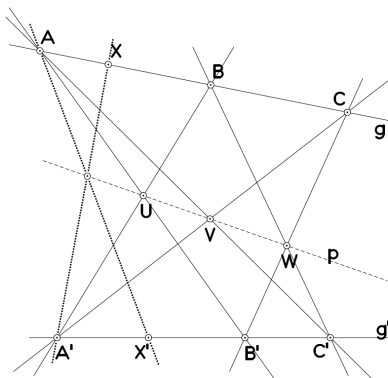
mit Lösungen

edition waldorf

Der bequemeren Konstruktion zugeordneter Elemente dienen folgende Sätze:

Kreuzliniensatz

Die Schnittpunkte entsprechender Kreuzlinien zweier projektiv aufeinander bezogener Punktreihen liegen alle in einer Geraden, der „Perspektivitätsachse“ p der beiden projektiven Reihen.

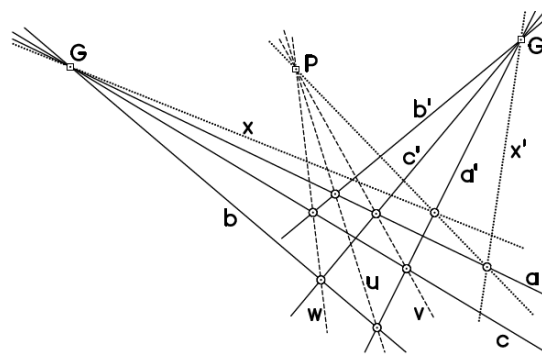


„Entsprechende Kreuzlinien“ sind dabei z.B. $\overline{AB'}$ und $\overline{A'B}$, $\overline{AC'}$ und $\overline{A'C}$ u.s.w.

Kreuzpunktsatz

[S. 65]

Die Verbindungsgeraden entsprechender Kreuzpunkte zweier projektiv aufeinander bezogener Geradenbüschel gehen durch einen Punkt, das „Perspektivitätszentrum“ P der beiden projektiven Büschel.



„Entsprechende Kreuzpunkte“ sind dabei z.B. $a \cdot b'$ und $a' \cdot b$, $a \cdot c'$ und $a' \cdot c$ u.s.w.

Invarianten

Projektive Abbildungen sind

inzidentreu	wenn P und g inzidieren, dann auch P' und g'	
ordnungstreu	wenn sich (A,B) und (C,D) trennen, dann auch (A',B') und (C',D')	
harmonizitätstreu	wenn (A,B) und (P,Q) in harmonischer Lage sind, dann auch (A',B') und (P',Q')	
doppelverhältnistreu	$DV(A',B',C',D') = DV(A,B,C,D)$	[S.76]

Hauptsatz (Fundamentalsatz) der Projektiven Geometrie

[S. 63, Beweis: S. 70]

Zwei Grundgebilde derselben n -ten Stufe ($n = 1, 2, 3$) seien gegeben. Dann ist durch je $n+2$ Elemente und deren Bildelemente in allgemeiner Lage eine projektive Zuordnung zwischen den beiden Grundgebilden eindeutig bestimmt.

Speziell ist die projektive Zuordnung zwischen zwei Punktreihen (zwei Geradenbüscheln) durch die Angabe von 3 Paaren zugeordneter Punkte (bzw. Geraden) eindeutig festgelegt.

Eine Zuordnung zwischen zwei Punktreihen (zwei Geradenbüscheln) mit drei Fixpunkten (drei Fixgeraden) ist die Identität.

Involutionen

[S. 109]

Eine Abbildung ι eines Grundgebildes auf sich heißt eine Involution, wenn die Elemente wechselseitig zugeordnet sind: Wenn $A_2 = \iota(A_1)$, dann auch $A_1 = \iota(A_2)$.

Die zweimalige Hintereinanderausführung führt zum Ausgang zurück: $\iota \circ \iota = \text{Id}$ (Identität);

ι stimmt dann mit ihrer Inversen überein: $\iota^{-1} = \iota$.

Sonderfall: die Pol-Polaren-Korrelation π , die jedem Punkt die Polare bezüglich eines festen Kegelschnitts zuweist und jeder Geraden den Pol bezüglich dieses Kegelschnitts.

Eine Korrelation ist dabei ganz allgemein eine inzidenttreue Abbildung, die jedem Punkt eine Gerade (im Raum: eine Ebene) zuordnet und jeder Gerade (jeder Ebene) einen Punkt.

Teil 2

Die Aufgaben

- Aufgaben:** a) Beschreiben Sie die sechs Seiten dieses Fern-Vierecks. (Lösung: S. 101)
Welche mit dem Würfel verbundene Symmetrie-Ebenen gehören dazu?
- b) Für ein vollständiges Viereck fehlen noch die Nebenecken und dann die Nebenseiten.
Welche Ebenen bzw. Kanten im Würfel entsprechen den Nebenecken und -seiten?

Aufgabe 9:

Vorstellungsübung:

Der Würfel erzeugt auch ein vollständiges Vierseit in der Fernebene, nämlich durch die Ebenen im Mittelpunkt, die senkrecht zu den Raumdiagonalen sind. Sie treffen zum Teil Würfelkanten, und zwar stets in deren Mittelpunkt. Betrachten Sie zunächst die Ebene, die senkrecht auf der Raumdiagonale von oben-rechts-vorne nach unten-links-hinten verläuft. Sie trifft nicht die 6 am nächsten gelegenen Kanten, also nicht die Kanten oben-vorne oder oben-rechts oder rechts-vorne (und auch nicht unten-hinten oder unten-links oder links-hinten), wohl aber die 6 übrigen. Verfolgen Sie nun die Schnittlinie, die diese Ebene auf dem Würfel erzeugt. Beginnen Sie bei der Kante oben-hinten (in deren Mittelpunkt). Bleiben Sie zunächst auf der Fläche oben, von dieser wird ein rechtwinkliges Dreieck abgeschnitten, und Sie gelangen in die Mitte der Kante oben-links. Dort müssen Sie die Fläche wechseln, und dafür bleibt nur die linke; auf dieser gelangen Sie zur Kante vorne-links. Dort wechseln Sie auf die Fläche vorne und gelangen zur Kante vorne-unten. Weiter auf der Fläche unten zur Kante unten-rechts, dann auf der Fläche rechts zur Kante rechts-hinten und zuletzt auf der Fläche hinten zurück zur Kante oben-hinten. Damit haben Sie von Kantenmitten zu benachbarter Kantenmitte rings herum ein regelmäßiges Sechseck durchlaufen.

Aufgaben:

- a) Begründen Sie, dass es vier Ebenen dieser Art am Würfel gibt. Geben Sie die Schnittgeraden zweier solcher Ebenen an.
Beschreiben Sie die sechs Ecken des von diesen Ebenen erzeugten Fern-Vierseits.
- b) Für ein vollständiges Vierseit fehlen noch die Nebenseiten und dann die Nebenecken. Welche Ebenen bzw. Kanten am Würfel entsprechen den Nebenecken und -seiten? (Lösung: S. 102)

Im Anschluss an die Aufgaben 7 und 9 ist noch die folgende von Interesse, die sich mit den Symmetrien am Würfel beschäftigt, und zwar allen Symmetrieachsen und Symmetrieebenen. Dabei ist die Achsensymmetrie im Raum vielleicht ungewohnt: Zwei sich in der Achsensymmetrie entsprechende Punkte liegen so, dass die Symmetrieachse die durch diese Punkte bestimmte Strecke unter einem Rechten Winkel im gewöhnlichen Mittelpunkt schneidet. Das Spiegelbild zu einem gegebenen Punkt ergibt sich also durch die gewohnte ebene Achsensymmetrie, nämlich in derjenigen Ebene, die durch den Punkt und die Symmetrieachse bestimmt ist.

Darüber hinaus gibt es noch Achsen für Drehsymmetrien, die hier keine Rolle spielen sollen.

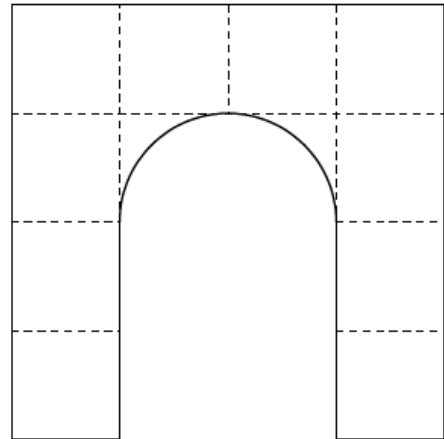
Aufgabe 10:

Erläutern Sie, dass insgesamt 13 Symmetrieachsen und 13 Symmetrieebenen existieren.

Zeigen Sie, dass die Würfelsymmetrien eine harmonische Grundfigur in der Fernebene erzeugen.
(Lösung: S. 103)

Aufgabe 3:

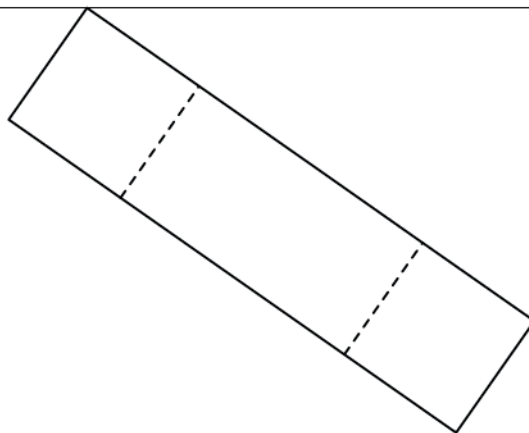
Es ist die perspektivische Ansicht eines Torbogens zu konstruieren. Für diesen sind der Grundriss und nebenan eine Ansicht von vorne gegeben. Er ist gedanklich aus lauter gleichgroßen Würfeln aufgebaut. (Lösung: S. 107)



°O₀

h

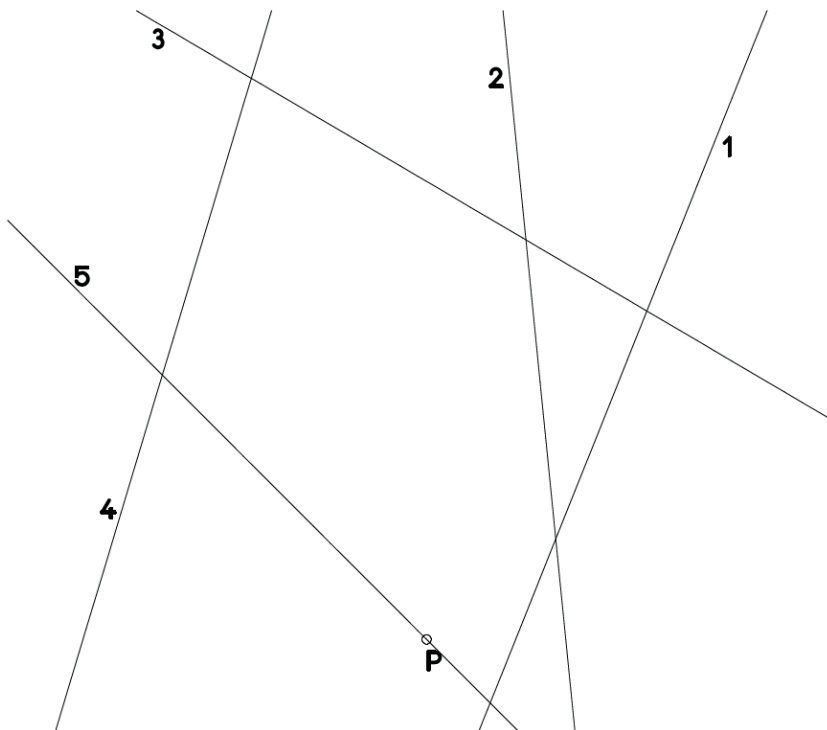
s



Satz von BRIANCHON – Aufgaben

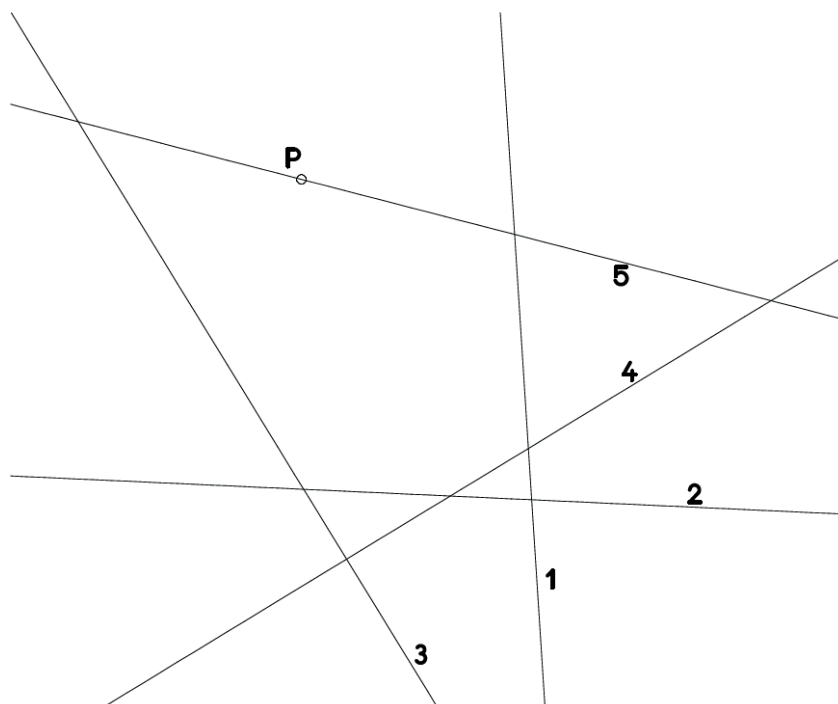
Aufgabe 1: Gegeben sind fünf Tangenten 1, 2, 3, 4, 5 eines Kegelschnitts.
Konstruieren Sie die Tangente, die durch den Punkt P geht.

(Lösung: S. 125)

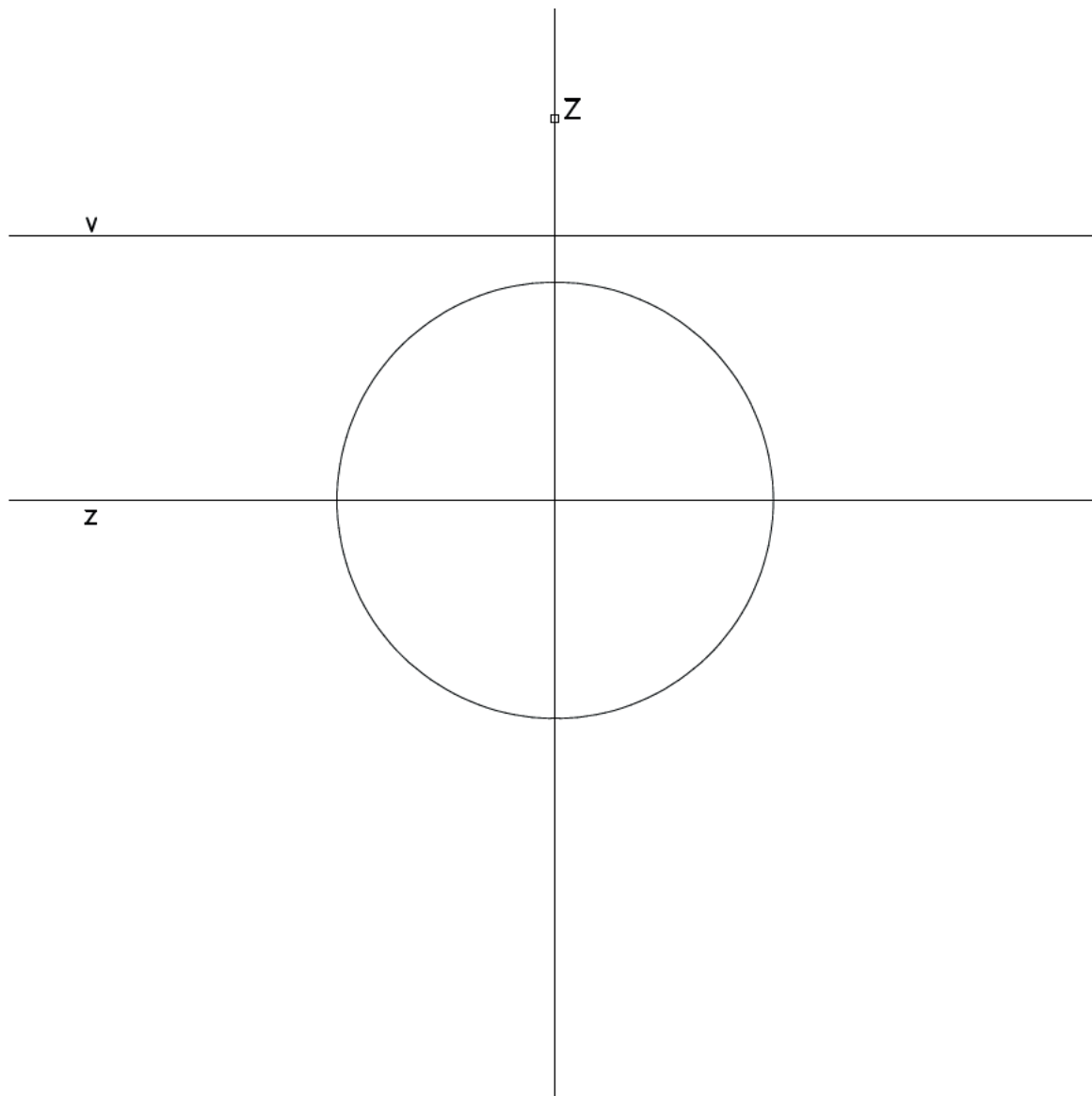


Aufgabe 2: Gegeben sind fünf Tangenten 1, 2, 3, 4, 5 eines Kegelschnitts.
Konstruieren Sie die Tangente, die durch den Punkt P geht.

(Lösung: S. 125)



- Aufgabe 16:** Gegeben sind eine Zentralkollineation durch Zentrum, Achse und ein Kreis, ebenso die Verschwindungsgerade, gegenüber Aufgabe 14 verschoben.
Konstruieren Sie punktweise das Bild des Kreises.
Was für eine Kurve ist die Bildkurve? (Lösung: S. 141)



- d) Begründen Sie, dass $\gamma^{-1} = \alpha \circ \beta$ ist und berechnen Sie dann die Gleichung von q .
 e) Berechnen Sie – mit den Ergebnissen aus d) – die Gleichung von u^{γ} auf einfachere Weise.
 (Lösung: S. 159)

Aufgabe 9:

Gegeben sei eine projektive Abbildung $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ durch die Matrix \mathbf{A} , außerdem die Punkte $P[\mathbf{p}]$ und $Q[\mathbf{q}]$ sowie die Geraden $g\{\mathbf{u}\}$ und $h\{\mathbf{v}\}$, wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Matrix der Umkehrabbildung.
 b) Berechnen Sie die Bilder P', Q', g', h' und die Urbilder $'P, 'Q, 'g, 'h$ von P und Q , g und h .
 c) Berechnen Sie die Gleichungen der Verschwindungs- und der Fluchtgerade.
 d) Berechnen Sie Fixpunkte und Fixgeraden.
 (Lösung: S. 161)

Aufgabe 10:

Gegeben sei eine projektive Abbildung $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ durch die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

- a) Berechnen Sie Fixpunkte und Fixgeraden.
 b) Um was für eine Abbildung handelt es sich?
 c) Berechnen Sie die Gleichungen der Verschwindungs- und der Fluchtgerade.
 (Lösung: S. 163)

Aufgabe 11:

Gegeben seien zwei Zentralkollineationen α und β durch die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

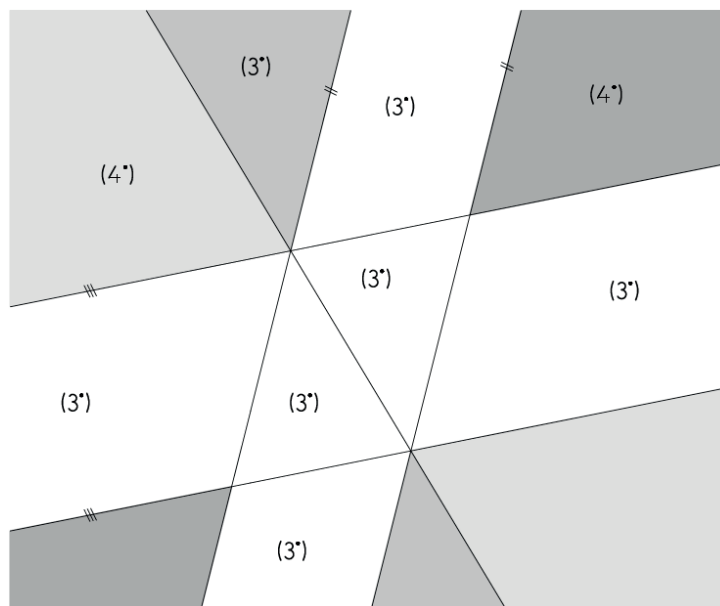
- a) Berechnen Sie die Fixelemente, die Flucht- und die Verschwindungsgerade.
 Um was für Zentralkollineationen handelt es sich?
 b) Berechnen Sie die entsprechenden Elemente für die Projektivität $\gamma = \beta \circ \alpha$.
 Um was für eine Abbildung handelt es sich hier?
 (Lösung: S. 163)

Aufgabe 12:

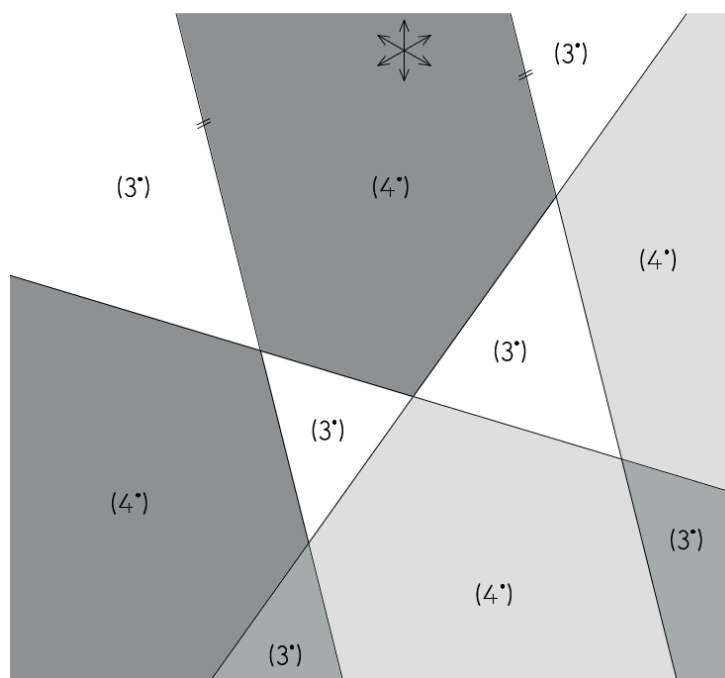
Gegeben sei zwei räumliche Projektivitäten α und β durch $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{x}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$

mit
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

- a) Untersuchen Sie die zusammengesetzte Abbildung $\gamma = \beta \circ \alpha$: Berechnen Sie die Fixpunkte und die Verschwindungsebene.
 b) Verifizieren Sie die Ergebnisse durch geometrische Überlegungen.
 c) Weisen Sie auf dreierlei Weise nach, dass γ involutorisch ist.
 (Lösung: S. 166)

Aufgabe 3:

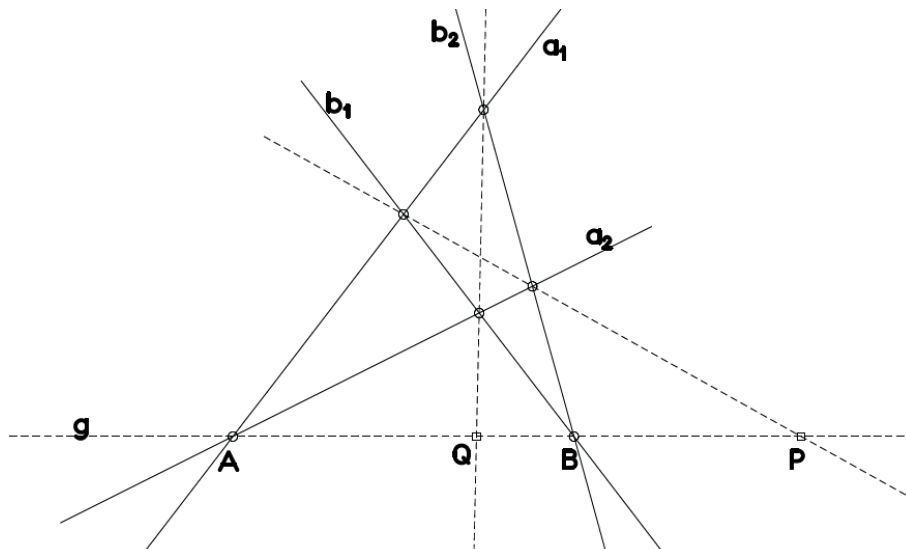
Es gibt insgesamt: 7 (3*)-Gebiete
2 (4*)-Gebiete

Aufgabe 4: Es gibt keine Gebiete, die sich über die Ferngerade hinweg erstrecken.

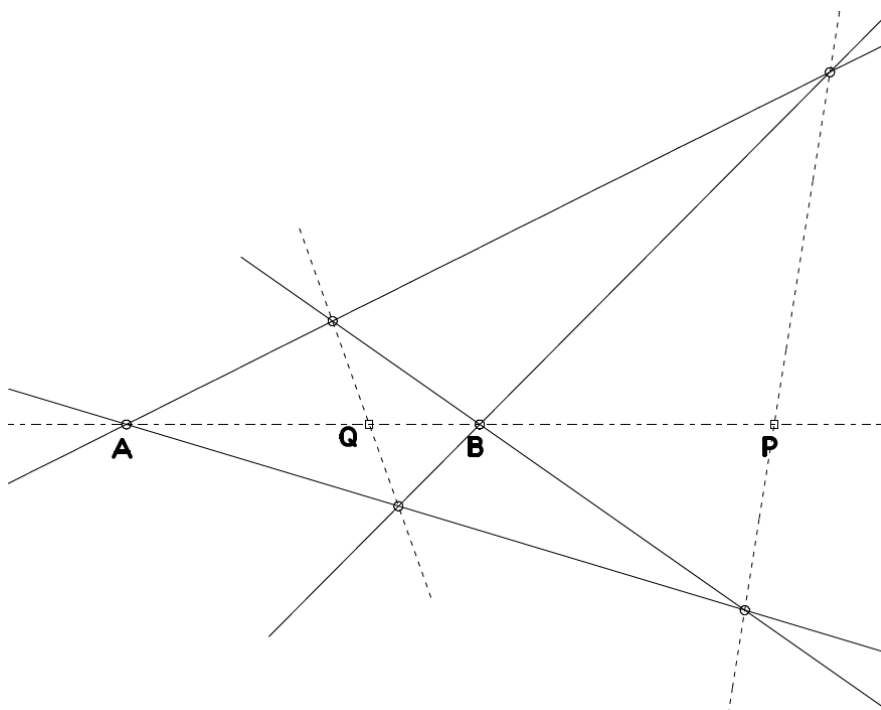
Es gibt insgesamt: 6 (3*)-Gebiete
4 (4*)-Gebiete

Harmonische Lage – Lösungen

Aufgabe 1: A, B werden aufgefasst als Ecken eines vollständigen Vierseits und P als eine Nebenecke. Zwei Seiten (a_1, a_2) durch A und eine Seite (b_1) durch B sind beliebig. Die Nebenseite n geht durch P und $a_1 \cdot b_1$; damit ist $b_2 = \overline{(a_2 \cdot n)B}$ die vierte Seite. Die dritte Nebenseite $\overline{(a_1 \cdot b_2)(a_2 \cdot b_1)}$ schneidet die gegebene Gerade g in Q.



Aufgabe 2: Die Konstruktion ist die gleiche wie in Aufgabe 1, wenn auf den ersten Blick auch völlig anders aussehend.

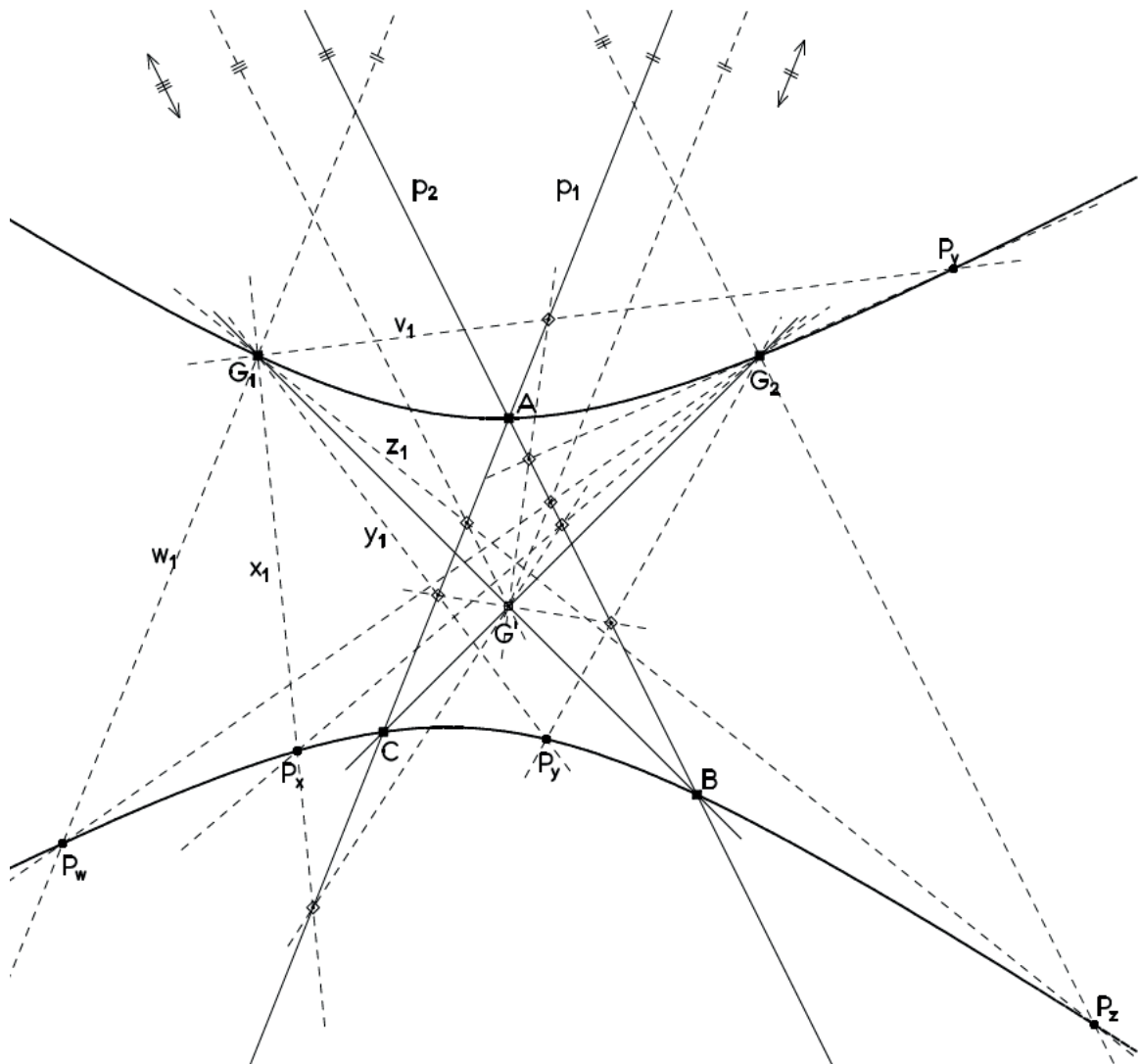


Aufgabe 2: Die Bezeichnungen beziehen sich auf den Weg der Konstruktion, ausgehend von einer Geraden x_1 des Büschels G_1 :

Wahl von x_1 in $G_1 \rightarrow X' = x_1 \cdot p_1 \rightarrow X' = x' \cdot g' \rightarrow X'' = x' \cdot p_2 \rightarrow x_2 = \overline{X''G_2}$.

$P_x = x_1 \cdot x_2$ ist dann ein Punkt der Kurve 2. Ordnung (des Kegelschnitts).

In entsprechender Weise wird hier konstruiert für die Geraden v_1, w_1, y_1, z_1 . Dabei wurden v_1, y_1 beliebig gewählt, $w_1 \parallel p_1$. Das ergibt die Punkte P_v, P_w, P_y . Für den Punkt P_z wurde umgekehrt $z_2 \parallel p_2$ angenommen und dann sozusagen rückwärts konstruiert.



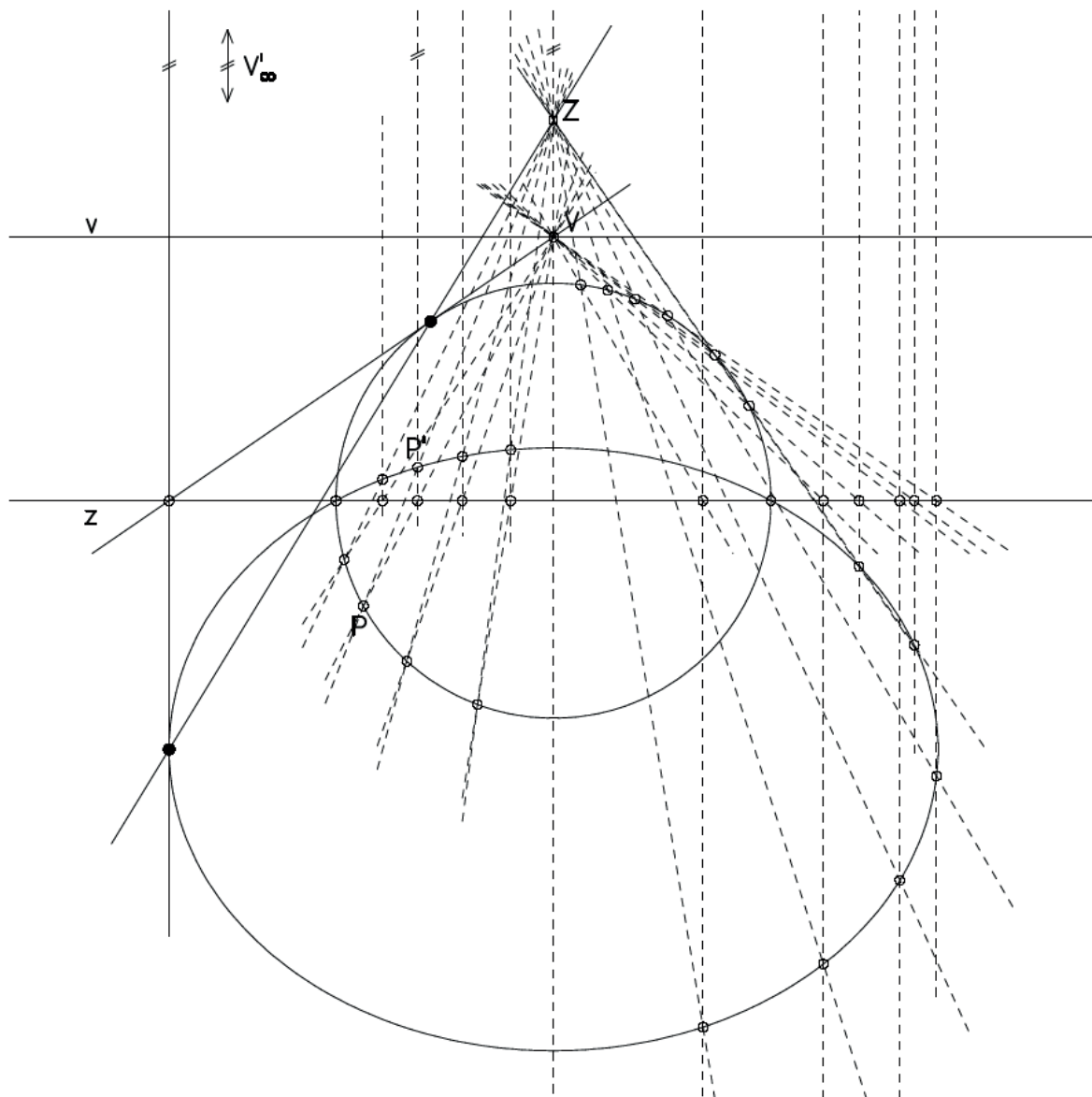
Aufgabe 16: Man benötigt zuerst ein Paar von Punkt und Bildpunkt. Ein beliebiger Punkt V von v hat als Bild den Fernpunkt V' von \overline{VZ} .

Dann wird die übliche Methode zur Konstruktion von Bildpunkten angewandt.

Die Schnittpunkte des Kreises mit z sind Fixpunkte, gehören also auch der Bildkurve an. Die Bildkurve ist eine Ellipse; da der Kreis die Verschwindungsgerade nicht trifft, muss die Bildkurve ganz im Endlichen liegen.

Es sei V der Verschwindungspunkt der Symmetrieachse. Die Ellipsentangenten in den Hauptscheiteln gehen beide durch V'_∞ , daher gehen ihre Urbilder als Kreistangenten durch V . Die Bildpunkte der Berührungspunkte dieser Kreistangenten sind die Hauptscheitel der Ellipse.

Der Übersichtlichkeit wegen wurden rechts nur die unteren Punkte konstruiert, links der Hauptscheitel und sonst nur die oberen Punkte.



e) Die Parallele ist die Gerade durch Q und den Fernpunkt von g.

$$g \dots -4x_0 + 2x_1 - x_2 = 0$$

Im Fernpunkt G_∞ ist $x_0 = 0$, also $2x_1 - x_2 = 0$ oder $x_2 = 2x_1$, also ist $G_\infty(0:1:2)$

$$\text{Gerade } \overline{QG_\infty} \dots \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 9 \end{vmatrix} = x_0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} - x_1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$17x_0 + 4x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\underline{\text{Parallele } \dots 17x_0 + 4x_1 - 2x_2 = 0}$$

$$[\text{inhomogen: } y = 2x + \frac{17}{2}]$$

Aufgabe 2:

a) Punktprobe für P ergibt koordinatenweise:

$$1 = \lambda + \mu \quad (1)$$

$$3 = \lambda + 2\mu \quad (2)$$

$$6 = -2\lambda + 2\mu \quad (3)$$

$$\underline{11 = -5\lambda + 3\mu \quad (4)}$$

$$(2) - (1) \quad 2 = \mu$$

$$(3) + 2 \cdot (1) \quad 8 = 4\mu$$

$$(4) + 5 \cdot (1) \quad 16 = 8\mu$$

Man sieht: für $\mu = 2$ und dann aus (1) $\lambda = -1$ ist das System lösbar:

P inzidiert mit g.

Punktprobe für Q:

$$1 = \lambda + \mu \quad (1)$$

$$-3 = \lambda + 2\mu \quad (2)$$

$$-18 = -2\lambda + 2\mu \quad (3)$$

$$\underline{-7 = -5\lambda + 3\mu \quad (4)}$$

$$(2) - (1) \quad -4 = \mu$$

$$(3) + 2 \cdot (1) \quad -16 = 4\mu$$

$$(4) + 5 \cdot (1) \quad -2 = 8\mu$$

Man sieht: das System ist nicht lösbar:

Q inzidiert nicht mit g.

b) $\overline{PQ} \dots \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{p} + \mu \cdot \mathbf{q}$, $((\lambda, \mu) \neq (0, 0))$

$$\underline{\text{Parametergleichung } \dots \mathbf{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -18 \\ -7 \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)}$$

c) Falls es einen Schnittpunkt gibt (für parallele Gerade wäre das ein Fernpunkt), muss gelten

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für Werte } \lambda, \mu, s, t \text{ mit } (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \text{ und } (s, t) \neq (0, 0)$$

$$\lambda + \mu = s + t \quad (1)$$

$$\lambda + 2\mu = -s - 2t \quad (2)$$

$$-2\lambda + 2\mu = 2s + 2t \quad (3)$$

$$\underline{-5\lambda + 3\mu = s + t \quad (4)}$$

$$(1) - (2) \quad -\mu = 2s + 3t \quad (1')$$

$$2 \cdot (1) + (3) \quad 4\mu = 4s + 4t \quad (2')$$

$$5 \cdot (1) + (4) \quad \underline{8\mu = 6s + 6t \quad (3')}$$

$$(2') + 4 \cdot (1') \quad 0 = 12s + 16t \quad (1'')$$

$$(3') + 8 \cdot (1') \quad 0 = 22s + 30t \quad (2'')$$

Das System $\{(1''), (2'')\}$ hat offensichtlich nur die trivial Lösung $s = 0, t = 0$:

die Geraden sind windschief.

$$\begin{aligned} \underline{1. \text{ Nachweis: }} \gamma^{-1} &= (\beta \circ \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} = \alpha \circ \beta && [\text{weil } \alpha, \beta \text{ involutorisch}] \\ &= \beta \circ \alpha && [\text{weil } \alpha, \beta \text{ vertauschbar}] \\ &= \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{2. \text{ Nachweis: }} \gamma \circ \gamma &= (\beta \circ \alpha) \circ (\beta \circ \alpha) = (\beta \circ \alpha) \circ (\alpha \circ \beta) && [\text{weil } \alpha \text{ und } \beta \text{ vertauschbar}] \\ &= \beta \circ (\alpha \circ \alpha) \circ \beta = \beta \circ \text{Id} \circ \beta = \beta \circ \beta && [\text{weil } \alpha \text{ involutorisch}] \\ &= \text{Id} && [\text{weil } \beta \text{ involutorisch}] \end{aligned}$$

$$\underline{3. \text{ Nachweis: }} \mathbf{C}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16 \cdot \mathbf{E}$$

damit ist $\gamma \circ \gamma$ die Identität, also γ involutorisch.

4. Nachweis: Die Fluchtebene stimmt mit der Verschwindungsebene überein:

Die Fluchtebene ist bestimmt durch drei Fluchtpunkte als Bildern dreier beliebiger Fernpunkte

$$U_i[\mathbf{u}_i] \ (i = 1, 2, 3); \text{ z.B. } \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit den Bildern } \mathbf{u}_i' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_i, \text{ also } \mathbf{u}_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}:$$

$$u^\gamma \dots \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & 4 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = x_0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - x_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - x_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$16 \cdot x_0 - 4 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 4x_3 = 0 \quad \text{oder} \quad 4 \cdot x_0 - x_1 - x_3 = 0 \quad \dots \underline{\text{dieselbe Ebene}} \text{ wie v.}$$

Die folgende Zeichnung zeigt die für die Aufgaben 12 und 13 die wesentlichen Elemente im Schrägbild: die Zentren, Kollineationsebenen, Flucht- und Verschwindungsebenen, in den besonders hervorgehobenen Geraden die Fixpunktgeraden oder Achsen der zusammengesetzten axialen Kollineation.