Alexander Stolzenburg

Projektive Geometrie

edition waldorf

Sehr knappe Vorbemerkungen

Ich habe die projektive Geometrie in meinem Unterricht an der Freien Waldorfschule in Essen seit 1978 in den Klassenstufen 11 bis 13 unterrichtet und dann seit dem ersten Abitur im Schuljahr 1980/81 auch jedes Jahr Aufgaben aus der projektiven Geometrie in den Abiturprüfungen gestellt – seit der Differenzierung in Grund- und Leistungskurse in beiden Kursarten. Von verschiedenen Seiten wurde immer wieder die Frage gestellt, wo man das nachlesen könne. Einen ersten Anfang machte dann 1985 eine Skizze des Unterrichtsstoffes im Zusammenhang mit der Genehmigung als „Besonderes Gebiet" bei der Neugestaltung der Abitursprüfungsordnung an Waldorfschulen in Nordrhein-Westfalen. Im Laufe der Zeit ist diese erste Skizze dann angewachsen. Dabei war es mein Bestreben, das im Unterricht Behandelte oder Behandelbare darzustellen, aber daneben auch Angrenzendes einzubeziehen.

Als Leser denke ich mir einerseits Lehrer, die vielleicht auch daran denken, selber die projektive Geometrie zu unterrichten (wozu ich nur ermuntern kann: es macht Lehrern und auch vielen Schülern Freude), andererseits Schüler, die etwas im Unterricht Behandeltes nachlesen möchten – und nicht zuletzt auch einfach Freunde der projektiven Geometrie.

Das Vorgehen ist weitgehend synthetisch, aber daneben spielen auch die Methoden der analytischen Geometrie eine deutliche Rolle, bis hin zur Einführung von homogenen Koordinaten. In der Hauptsache werden Fragen der ebenen Geometrie behandelt, aber es gibt immer wieder Ausblicke auf die Gegebenheiten im Raum.

Der Umfang geht natürlich weit über das hinaus, was mit einer Klasse behandelt werden kann. Vieles übersteigt auch die Anforderungen, die in der Schule sinnvoll sind. Manche Beweise, z.B. im Kapitel über die freie Geometrie ebener Kurven, aber auch den Beweis des „Fundamentalsatzes" kann man auch ohne weiteres weglassen und durch Plausibilitätsbetrachtungen ersetzen.

Es ist nicht nötig, alles der Reihe nach durchzuarbeiten; die einzelnen Teile sind so weit als möglich voneinander unabhängig, das mag auch die Wiederholungen entschuldigen.

Als Prüfungsaufgaben in der 13. Klasse wurden in Essen stets Aufgaben im Zusammenhang mit Zentralkollineationen und Kegelschnitten gestellt, im Leistungskurs auch solche mit homogenen Koordinaten, Matrizen und Eigenwertaufgaben im Zusammenhang mit allgemeinen projektiven Abbildungen. Am Ende sind einige Beispiele angegeben.

Was allermeist aber noch fehlt, ist eine gewisse Fülle von Übungsaufgaben.

Mein Dank gilt meinem Marburger Kollegen K.-Fr. Georg, der mich auf viele Fehler aufmerksam gemacht hat und darüber hinaus wesentlich zur Lesbarkeit beigetragen hat.

Essen, im August 2009

Alexander Stolzenburg
Schellstr. 49, 45134 Essen
eMail: a@stolzenburg-essen.de

Leseanleitung

Das vorliegende Buch soll einerseits benutzt werden können, die projektive Geometrie in einer gewissen Breite kennen zu lernen und sich in sie einzuarbeiten, erhebt den andererseits Anspruch wissenschaftlicher Exaktheit und (in der Regel) gedanklicher Vollständigkeit. Beides schließt sich manchmal gegenseitig aus. Geht es nur um ein Kennenlernen, dann darf und soll man einige der Spitzfindigkeiten, auch einige der Beweise, bei einem ersten Lesen getrost überschlagen.

Im Kern handelt es sich um eine Darstellung des im Unterricht vorbrachten Stoffes; sie ist aber an allen Seiten um die benachbarte Gebiete angereichert.

Lehrer in Oberstufen möchte ich noch besonders auf das Kapitel „Affine Abbildungen und homogene Koordinaten" (s. S.238) hinweisen, in dem ausführlich gezeigt wird, wie gewisse Aufgaben mithilfe von homogenen Koordinaten, also mit einer Anleihe bei der projektiven Geometrie leichter gelöst werden können. Man mag das als Ermutigung nehmen, die grundliegenden Ideen der projektiven Geometrie im Unterricht nicht ganz unter den Tisch fallen zu lassen; mehr als das braucht man nicht einmal.

Die vielen Zeichnungen können die Gedankengänge veranschaulichen, sollen aber nicht davon abhalten, auch selber zu zeichnen. Es gehört zum Wesen der projektiven Geometrie, dass schon bei kleineren Verschiebungen der gegebenen Stücke, die Zeichnungen deutlich anders aussehen, bis dahin, dass wichtige Punkte außerhalb des Zeichenblattes zu liegen kommen.

Kein schlechter allgemeiner Rat zum Lesen in Mathematikbüchern: Man fange irgendwo in der Mitte oder weiter hinten an zu blättern und prüfe, ob man etwas finden kann, was schön ist oder interessant erscheint. Dann kann man immer noch weiter vorne suchen, um den Gedankengang zusammenzubringen.

Hier ein möglicher Leitfaden für ein erstes Kennenlernen:

<u>Zu empfehlen</u>:	<u>Zu überschlagen</u>:
Einführung der Fernelemente	
Dreiecksverwandlung	
Grundgebilde	
Axiome: das Fettgedruckte Dualitätsprinzip	Axiome
Trennungsrelation: Begriff und Sätze	Trennungsrelation: die Beweise
Gliederung	
Satz von DESARGUES	MOULTON-Ebene
vollständiges Vierseit / Viereck harmonische Lage	
	Räumliche Konfigurationen (die Behandlung ist stellenweise mühselig)

Die Axiome der projektiven Geometrie

Die ganze Axiomatik ist wichtig für den wissenschaftlich korrekten Aufbau der projektiven Geometrie. Die damit verbundenen Spitzfindigkeiten sind für das Verständnis nicht unbedingt wichtig. Es genügt beim ersten Lesen, den Inhalt der Axiome zur Kenntnis zu nehmen und sich die Zusammenstellung der Inzidenzausssagen (S. 16) klarzumachen.

EUKLID, auf den das erste Axiomensystem der Geometrie zurückgeht, hatte noch versucht, die Objekte der Geometrie, also Punkt und Gerade, explizit zu definieren. Diese Versuche empfand man in der Folge als unbefriedigend, und seit HILBERT verzichtet man ganz darauf. Da es nur auf die Beziehungen zwischen den Objekten ankommt, beschränkt man sich darauf, diese Beziehungen zu beschreiben – und erklärt damit implizit auch die Objekte.

Die Axiome der projektiven Geometrie gliedern sich in vier Abteilungen: die Axiome der Inzidenz, der Reichhaltigkeit, der Anordnung und der Stetigkeit.

Ganz allgemein stellt man an ein Axiomensystem drei Forderungen:

<u>Unabhängigkeit</u>: Axiome sind abhängig, wenn eines von ihnen aus den anderen gefolgert werden kann; es kann dann weggelassen werden. In einem unabhängigen System kann also kein Axiom weggelassen werden. Überflüssige Axiome können als Schönheitsfehler angesehen werden. Wir werden uns hier oft über die Unabhängigkeitsforderung hinwegsetzen, wenn dadurch die Axiome übersichtlicher zu formulieren sind.

<u>Vollständigkeit</u>: Ein Axiomensystem heißt vollständig, wenn alle Modelle oder Realisierungen der Struktur isomorph sind. (<u>Isomorph</u> heißt dabei: es gibt eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Objekten, die mit den zwischen den Objekten erklärten Relationen und Verknüpfungen verträglich ist). Nicht immer verlangt man die Vollständigkeit; bei den Axiomen der Gruppentheorie interessieren z.B. gerade die verschiedenen Strukturen.

<u>Widerspruchsfreiheit</u>: Ein Axiomensystem ist widersprüchlich, wenn aus ihnen eine Aussage A und zugleich die gegenteilige Aussage nicht-A gefolgert werden kann. Die Widerspruchsfreiheit ist natürlich eine unabdingbare Forderung an jedes Axiomensystem. Sie ist nicht leicht zu beweisen. In der Geometrie greift man in der Regel dazu, geeignete Koordinaten einzuführen und dann die Widerspruchsfreiheit auf diejenige des Koordinatensystems (und der damit verbundenen Darstellungen von geometrischen Objekten) zurückzuführen.

Außerdem sollen die Axiome einfach sein und Sachverhalte beschreiben, die aus sich selbst evident sind, d.h. die keiner weiteren Begründung bedürfen. In der modernen Mathematik untersucht man aber auch willkürlich zusammengestellte Axiomensysteme. Auch wir werden hier die Fernpunkte mit Hilfe des Axioms einführen, dass zwei Geraden <u>immer</u> einen Schnittpunkt besitzen, was keinesfalls mit der gewöhnlichen Raumesanschauung übereinstimmt.

Solange wir nur ebene Geometrie treiben, und das wird meistens der Fall sein, sind die Objekte, mit denen wir umgehen, Punkte und Geraden; in der räumlichen Geometrie kommen noch die Ebenen dazu. Diese können in verschiedene Beziehungen zueinander treten, und deren einfachste ist die der „<u>Inzidenz</u>“:

– Ein Punkt kann in einer Geraden liegen oder, was das gleiche bedeutet, die Gerade kann durch den Punkt gehen. Man sagt dann auch: der Punkt gehört der Geraden an oder die Gerade dem Punkt – oder, jede Asymmetrie vermeidend: „Punkt und Gerade inzidieren“.
– In der räumlichen Geometrie kann ein Punkt in einer Ebene liegen oder die Ebene durch den Punkt gehen. Man sagt auch hier: Punkt und Ebene gehören einander an oder eben: „Punkt und Ebene inzidieren“.

Für die vier Punkte A, P, X, Y gibt es drei Möglichkeiten bezüglich des Trennens: $(A,P) \,\|\, (X,Y)$ oder $(A,X) \,\|\, (P,Y)$ oder $(A,Y) \,\|\, (P,X)$. Wir müssen sie der Reihe nach durchgehen, wobei aber die beiden letzten Fälle durch Vertauschen von X und Y auseinander hervorgehen; man beachte, dass auch in den Voraussetzungen und der Behauptung völlige Symmetrie in Bezug auf X und Y besteht. Der erste Fall wird sich als nicht möglich herausstellen:

1. Fall: $(A,P) \,\|\, (X,Y)$

Aus (i) folgt mit **(A_3)**:	$(A,P) \not\| (B,X)$	
und ebenso aus (ii):	$(A,P) \not\| (B,Y)$	
Aus diesen beiden mit **(A_5)**:	$(A,P) \not\| (X,Y)$	
also ein Widerspruch zur Annahme.		

2. Fall: $(A,X) \,\|\, (P,Y)$ (α)

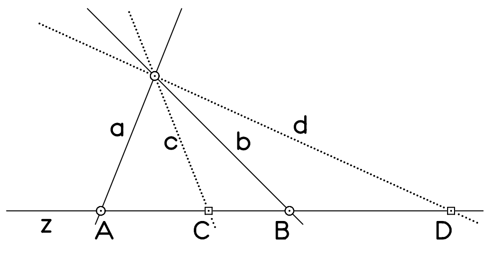
Aus (iii) und **(A_3)**:	$(Q,X) \not\| (P,Y)$	
Daraus und aus (α) mit Bemerkung (7):	$(A,Q) \,\|\, (P,Y)$	
Also mit **(A_3)**:	$(A,Y) \not\| (P,Q)$	(β)
Aus $(A,X) \,\|\, (P,Y)$ [s.o.] mit **(A_3)**:	$(A,Y) \not\| (P,X)$	
weiter mit (ii) wegen Bemerkung (7):	$(B,Y) \,\|\, (P,X)$	
Aus (iii) mit **(A_3)**:	$(Q,Y) \not\| (P,X)$	
und mit Bemerkung (7):	$(B,Q) \,\|\, (P,X)$	
und mit **(A_3)**:	$(B,X) \not\| (P,Q)$	
Mit (iii) folgt wegen Bemerkung (7):	$(B,Y) \,\|\, (P,Q)$	(γ)
Und endlich folgt aus (β) und (γ) wegen (7):	$(A,B) \,\|\, (P,Q)$	

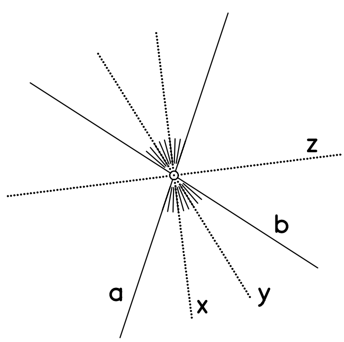
Trennungsrelation für Geraden

Es wird einfach dualisiert. Dann betrifft die Trennungsrelation vier verschiedene Geraden in einem Punkt, und sonst bleibt alles entsprechend wie oben. Hier, beim Geradenbüschel, hat man übrigens schon von vornherein die Situation, dass der Zwischenbegriff versagt.

Man kann auch von Axiom **(A_6)** ausgehen: Sei z eine Gerade und Z ein Punkt, der nicht mit Z inzidiert und seien A, B, C, D vier Punkte in z. Wenn nun die Geraden a, b, c, d in Z mit den Punkten A, B, C, D inzidieren, dann gilt:

$$(A,B) \,\|\, (C,D) \Leftrightarrow (a,b) \,\|\, (c,d).$$





Wie zwei Punkte in einer Geraden zwei Strecken oder Segmente erzeugen, so bestimmen auch zwei feste Geraden eines Büschels nicht einen Winkel, sondern zwei. Zwei Geraden a, b teilen die Menge aller Geraden durch ihren Schnittpunkt $a{\cdot}b$ in zwei Klassen ein: Diejenigen Geraden, die bezüglich (a,b) von einer beliebigen festen Geraden z getrennt werden bzw. nicht getrennt werden. Jede dieser Klassen heißt ein „Fächer“. Zwei Geraden x, y durch $a{\cdot}b$ gehören demselben Fächer an, wenn sie durch (a,b) nicht getrennt werden.

Der zweite der genannten Hintergründe ist der, dass „dual“ tiefgreifender genommen werden muss, als die bloße Vertauschung der Begriffe Punkt und Gerade vermuten lässt. Es muss z.B. auch hell mit dunkel vertauscht werden, Mann mit Frau, aktiv mit passiv, konvex mit konkav und eben: + mit –.

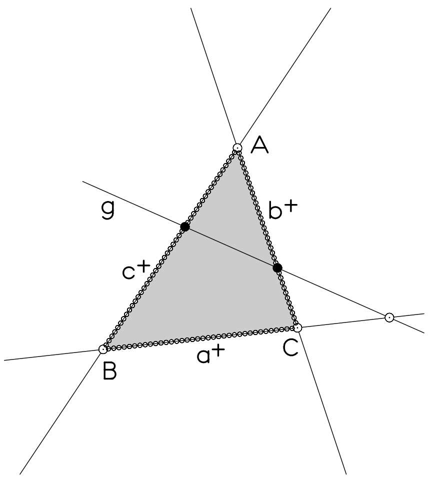
Es gilt nun die schöne Komplementarität, wie man direkt aus der oben angegeben vollständigen Übersicht über alle möglichen Gebiete und Bereiche ablesen kann:

Die Punkte eines Gebiets $(a^u b^v c^w)$ mit u, v, w ∈ {+, –} und diejenigen Punkte, die von den Geraden des Bereichs $[A^{-u} B^{-v} C^{-w}]$ – also desjenigen mit den umgekehrten Vorzeichen – überstrichen werden, ergänzen sich zum vollen Punktfeld (ohne die Punkte der Grenzgeraden a, b, c).

Die Geraden eines Bereichs $[A^u B^v C^w]$ mit u, v, w ∈ {+, –} und diejenigen Geraden, welche die Punkte des Gebiets $(a^{-u} b^{-v} c^{-w})$ – also desjenigen mit den umgekehrten Vorzeichen – treffen, ergänzen sich zum vollen Geradenfeld (ohne die Geraden der Grenzpunkte A, B, C).

Ein Punktgebiet werde von einer vierten Geraden g „getroffen“.
Die „Treffer“ sind gerade die Punkte der Geraden, die zugleich dem Gebiet angehören. Sie bilden eine Strecke.

Wir können die Lage der Geraden dadurch charakterisieren, dass wir angeben, welche Gebietsgrenzen sie trifft – oder durch den Geradenbereich, dem sie zuzurechnen ist.

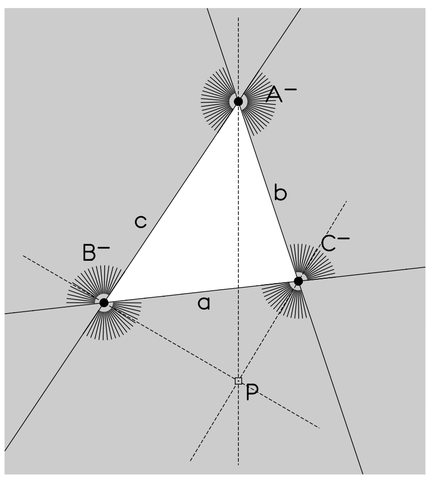


D.h.: Trifft die 4. Gerade z.B. die Geraden b, c innerhalb b^+, c^+, dann trifft sie a innerhalb a^- (denn sie kann nicht alle drei Grenzstrecken eines Gebietes treffen), und sie gehört zum Bereich $[A^- B^+ C^+]$.

Allgemein trifft eine 4. Gerade die Geraden a, b, c genau dann innerhalb a^u, b^v und c^w, wenn sie zum Bereich $[A^u B^v C^w]$ gehört.

Ein Geradenbereich werde durch einen vierten Punkt P „gesammelt“.
Die „Sammlung“ besteht aus den Geraden des Punktes, die zugleich dem Bereich angehören. Sie bilden einen Winkel.

Wir können die Lage des Punktes dadurch charakterisieren, dass wir angeben, welchem Winkelgebiet er angehört – oder durch das Punktgebiet, dem er zuzurechnen ist.



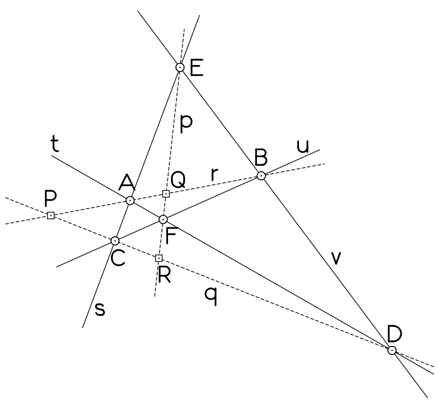
D.h.: Sammelt der 4. Punkt z.B. die Punkte B, C innerhalb B^-, C^-, dann sammelt er A innerhalb A^+ (denn er kann nicht durch alle drei Grenzwinkel eines Bereichs sammeln), und er gehört zum Gebiet $(a^+ b^- c^-)$.

Allgemein sammelt ein 4. Punkt die Punkte A, B, C genau dann innerhalb A^u, B^v und C^w, wenn er zum Gebiet $(a^u b^v c^w)$ gehört.

Vollständiges Vierseit / Viereck und harmonische Lage

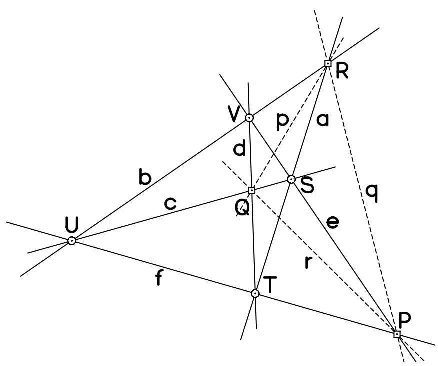
Aus der gewöhnlichen Geometrie ist man an Vierecke gewöhnt, die vier Ecken, vier Seiten und zwei Diagonalen haben. Das zeigt, dass man vor allem das endliche, von vier Seiten begrenzte Gebiet im Bewusstsein hat und nicht oder kaum über dessen Grenzen hinaus denkt – und schon gar nicht die Fernpunkte berücksichtigt. Außerdem bevorzugt unser an Punkten orientiertes Bewusstsein die Vorstellung, das Viereck sei, wie schon der Name sagt, primär aus den Eckpunkten bestimmt; und die Seiten denkt man sich als endliche Strecken. Genauso berechtigt ist aber der Standpunkt, die Seiten – als unendlich ausdehnte Geraden – als das Primäre zu denken; man spricht dann von einem Vierseit. Dieses hat dann, wenn man es vollständig denkt, alle möglichen Schnittpunkte als Ecken, ebenso wie zum vollständigen Viereck alle Verbindungsgeraden als Seiten gehören. Es besteht für uns kein Motiv, nur vier davon zu berücksichtigen.

Definition: Ein „vollständiges Vierseit“ besteht aus vier Geraden oder Seiten s, t, u, v sowie den sechs Ecken $A = s \cdot t$, $B = u \cdot v$, $C = s \cdot u$, $D = t \cdot v$, $E = s \cdot v$ und $F = t \cdot u$, die die Schnittpunkte der vier Seiten sind.
Ferner gehören dazu die „Nebenseiten“ $r = \overline{AB}$, $q = \overline{CD}$ und $p = \overline{EF}$; diese verbinden die Ecken, die nicht durch Seiten miteinander verbunden sind. Die Nebenseiten bilden das „Nebendreiseit“. Seine Ecken P, Q, R heißen „Nebenecken“ oder „Diagonalpunkte“ des vollständigen Vierseits.



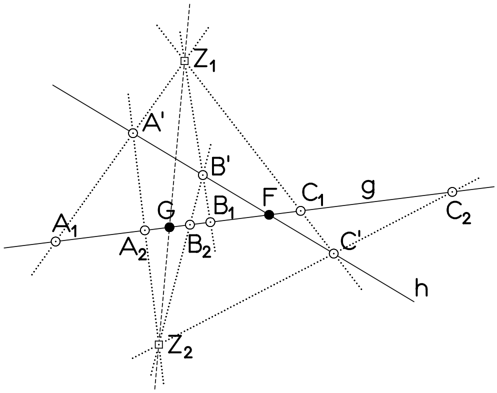
In jeder Nebenseite eines vollständigen Vierseits liegen zwei Ecken und zwei Nebenecken – z.B. in der Nebenseite r die Ecken A, B und die Nebenecken P, Q.

Definition: Ein „vollständiges Viereck“ besteht aus vier Punkten oder Ecken S, T, U, V sowie den sechs Seiten $a = \overline{ST}$, $b = \overline{UV}$, $c = \overline{SU}$, $d = \overline{TV}$, $e = \overline{SV}$ und $f = \overline{TU}$, die diese Ecken miteinander verbinden.
Ferner gehören dazu die „Nebenecken“ $R = a \cdot b$, $Q = c \cdot d$ und $P = e \cdot f$; das sind die Schnittpunkte der Seiten, die keine Ecken sind. Die Nebenecken bilden das „Nebendreieck“ oder „Diagonaldreieck“. Seine Seiten p, q, r heißen „Nebenseiten“ oder „Diagonalen“ des vollständigen Vierecks.



Durch jede Nebenecke eines vollständigen Vierecks gehen zwei Seiten und zwei Nebenseiten – z.B. durch die Nebenecke R die Seiten a, b und die Nebenseiten p, q.

Es folgt ein Beispiel für eine hyperbolische projektive Abbildung einer Punktreihe auf sich:



Die Punktreihe $g(A_1, B_1, C_1)$ wird aus einem Punkt Z_1 auf eine von g verschiedene Gerade h projiziert; man erhält die Punktreihe h(A', B', C'). Diese wird aus Z_2 wieder auf g projiziert, und man erhält die zur gegebenen projektive Punktreihe $g(A_2, B_2, C_2)$.

Die Punkte $F = g \cdot h$ und $G = g \cdot \overline{Z_1Z_2}$ sind offensichtlich sich selbst zugeordnet, sie sind also Fixpunkte. Die Projektivität ist gleichsinnig (s.u.).

Im Folgenden benötigen wir den Begriff des Richtungssinns, der sich auf den des Trennens zurückführen lässt, aber auch intuitiv klar ist So können wir auf abstrakte Behandlung verzichten. Man muss sich nur darüber klar sein (s. S. 22), dass in der projektiven Geraden eine Richtung erst durch drei Punkte bestimmt ist, anders als in der gewöhnlichen Geometrie, wo zwei Punkte, Anfang und Ende, reichen – der dritte ist dann unausgesprochen der Fernpunkt:

Def.: ABC und ABD haben denselben Richtungssinn, wenn $(A,B) +\!\!+ (C,D)$.

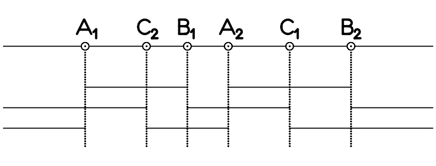
Insbesondere ändert sich der Richtungssinn natürlich nicht bei zyklischer Vertauschung: ABC, BCA, CAB haben denselben, ABC und ACB haben verschiedenen Richtungssinn.

Eine Projektivität einer Punktreihe g auf sich heißt „gleichsinnig“, wenn der Richtungssinn der Punkte $A_1B_1C_1$ und derjenige der zugeordneten Punkte $A_2B_2C_2$ übereinstimmen. Gleichbedeutend: Lässt man einen Punkt X_1 die Gerade g durchlaufen, so durchläuft der zugeordnete Punkt X_2 sie in der gleichen Richtung. Falls X_2 die Gerade in der entgegengesetzten Richtung wie X_1 durchläuft, heißt die Projektivität „gegensinnig“.

Gegensinnige Projektivitäten sind notwendig hyperbolisch. Denn wenn X_1 und der zugeordnete Punkt X_2 die volle Gerade einmal durchlaufen, müssen sie sich zweimal begegnen (in den Fixpunkten), weil beide den vollen Umlauf in entgegengesetzter Richtung absolvieren. Ein konkretes Beispiel werden wir unter den hyperbolischen Involutionen kennen lernen.

Damit die Projektivität einer Punktreihe g auf sich elliptisch ist, also keine Fixpunkte besitzt, ist es notwendig (aber nicht hinreichend), dass sie gleichsinnig ist. Will man eine elliptische Projektivität durch eine Kette von Perspektivitäten erzeugen, so benötigt man mindestens drei Glieder, denn bei nur zweien könnte man – wie im ersten Beispiel – sofort Fixpunkte angeben, (und zwei braucht man mindestens, um eine Zuordnung von g auf sich zu realisieren). Wir verzichten auf eine konkrete Darstellung durch Ketten von Perspektivitäten, machen uns aber abstrakt klar, dass es elliptische Projektivitäten geben muss.

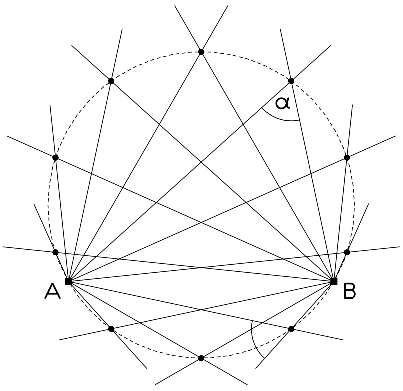
Dazu wählen wir die Punkte A_1, B_1, C_1 und die entsprechenden A_2, B_2, C_2 in g so, dass sie in der skizzierten Reihenfolge aufeinander folgen: $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$. Wir wissen, dass dadurch eine Projektivität bestimmt ist. Ein Punkt F_1, der bezüglich C_1 zwischen A_1 und B_1 liegt, muss – wegen der Ordnungstreue der Projektivität – ein Bild F_2 haben, das zwischen A_2 und B_2 liegt. So wie die Punkte gewählt wurden, kann dann F_2 nicht zwischen A_1 und B_1 liegen. Also kann F_1 kein Fixpunkt sein. Genauso es auch zwischen B_1 und C_1 und zwischen C_1 und A_1 keinen Fixpunkt geben, denn die zugeordneten Intervalle sind in allen Fällen disjunkt.



Auch dieser Satz ist umkehrbar: Der Ort aller Punkte, von denen aus zwei verschiedene Punkte A und B unter einem gleich großen Winkel erscheinen, ist ein Kreis.
Diese Erzeugungsart des Kreises lässt sich ebenfalls unter das Konzept der projektiven Erzeugung der Kegelschnitte subsumieren, weil sich das Winkelmaß projektiv definieren lässt. Nach der LAGUERRE'schen Formel nämlich ist der Winkel, den zwei Geraden a, b miteinander einschließen, im Wesentlichen durch ein Doppelverhältnis bestimmt, nämlich das Doppelverhältnis der Geraden a, b und der Geraden i_1, i_2, die den Schnittpunkt a·b mit den sogenannten „absoluten Punkten" I_1 bzw. I_2 verbinden:

$$\sphericalangle(a,b) = \tfrac{1}{2i}\ln\big(DV(a,b,i_1,i_2)\big) \qquad \text{[im Bogenmaß; ln = natürlicher Logarithmus]}$$

Die absoluten Punkte sind Fernpunkte und außerdem „imaginäre Punkte", Punkte mit den imaginären homogenen Koordinaten: $I_1(0:1:+i)$ bzw. $I_2(0:1:-i)$. Dabei ist i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$. Der Umgang mit den absoluten Punkten ist also absolut unanschaulich, während die homogenen Koordinaten, nötig für die Erfassung von Fernpunkten, leicht verständlich sind. Wir werden auf diese noch ausführlich zu sprechen kommen.
Da wir auf das Rechnen mit imaginären Zahlen und auch auf das Konstruieren mit imaginären Punkten verzichten, muss es bei diesen Andeutungen bleiben. Man mache sich immerhin klar, dass das Doppelverhältnis eine projektive Invariante ist, sodass es möglich sein muss, zu einer Geraden a_1 diejenige Gerade b_1 rein projektiv zu konstruieren, die mit a_1 einen Winkel von bestimmter gegebener Größe α einschließt. Diese Größe des Winkels kann z.B. durch zwei feste Geraden a und b (die einen gewissen Winkel α einschließen) gegeben sein.



Hier: $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$.

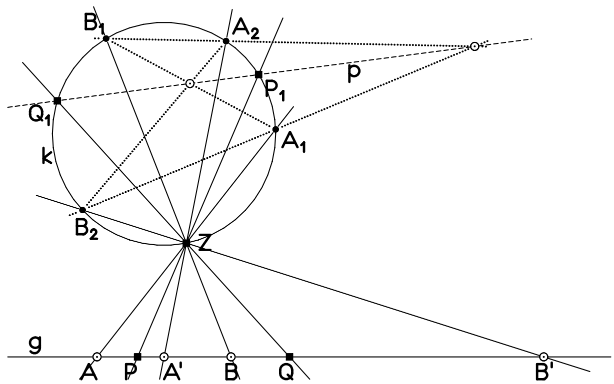
Man kann aus dem Sachverhalt des Peripheriewinkel-Satzes auch umgekehrt eine Einsicht gewinnen: Weil man weiß, dass der Peripheriewinkel-Satz auch in seiner Umkehrung gilt, muss die Zuordnung, die durch ihn zwischen den Geradenbüscheln in A und in B bestimmt ist (zugeordnet sind diejenigen Geraden, die sich in einem Punkt der Kreisperipherie treffen und dort alle einen gleich großen Winkel α einschließen), eine projektive Zuordnung sein. Damit muss die Möglichkeit, Winkel zu messen, projektiv erklärbar sein.

Dass die so erhaltenen, also projektiv erzeugten, Kurven wirklich Kegelschnitte im herkömmlichen Sinn sind, haben wir noch nicht wirklich nachgewiesen.
Wir wissen aber schon, dass wir auf diese Weise Kreise erhalten können. Wenn man nun die Punkte und Tangenten eines Kreises mit einem Punkt außerhalb seiner Ebene durch Geraden bzw. Ebenen verbindet, erhält man einen Kreiskegel. Schneidet man diesen mit einer beliebigen Ebene, die nur nicht durch die Kegelspitze gehen soll, dann ist die Schnittkurve ein Kegelschnitt im herkömmlichen Sinn. Dabei wird das ganze Gefüge von Geraden und Punkten, welches die projektive Erzeugung des Kreises ausmachte, aus der Kegelspitze in ein ebensolches auf der Schnittebene projiziert, denn die Inzidenzen bleiben bei der Projektion unverändert. Damit wird in der Schnittebene der Kegelschnitt projektiv erzeugt. Weil jeder Kegelschnitt (im herkömmlichen Sinn) Schnitt einer Ebene mit einem geeigneten Kreiskegel ist, erhalten wir durch die projektive Erzeugung auch nichts anderes als Kegelschnitte.

Außerdem werden wir später die Gleichungen der projektiv erzeugten Punktreihen 2. Ordnung aufstellen und dann genau die bekannten Gleichungen von Kegelschnitten erhalten.

Die STEINER'sche Fixpunktkonstruktion

In einer Geraden g seien zwei Paare einander nicht trennender Punkte (A,A') und (B,B') gegeben.
Gesucht seien die Fixpunkte P, Q der Involution AA'**.**BB'.
Das ist gleichbedeutend mit: Gesucht seien die Punkte P und Q, welche sowohl von (A,A') als auch von (B,B') harmonisch getrennt werden.



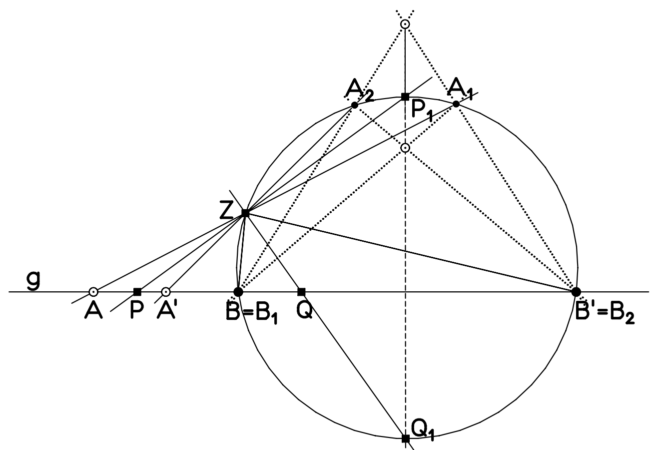
Man zeichne einen Kreis k und projiziere die gegebene Involution AA'**.**BB' aus irgendeinem seiner Punkte Z auf k: $(A_1A_2)\mathbf{.}(B_1B_2)$.
Die Perspektivitätsachse – das ist die Gerade, die durch $\overline{A_1B_2} \cdot \overline{A_2B_1}$ und durch $\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_2B_2}$ geht – schneidet k in den Fixpunkten $P_1 = P_2$, $Q_1 = Q_2$ der Involution auf k. Die Geraden $\overline{ZP_1}$ und $\overline{ZQ_1}$ übertragen diese in die gesuchten Fixpunkte P, Q in g.

Man kann (und muss!) zeigen, dass die Konstruktion immer möglich ist, d.h. dass die Perspektivitätsachse immer eine Sekante des Kreises ist. Sollten sich die gegebenen Punktepaare allerdings trennen, dann ist die Perspektivitätsachse eine Passante des Kreises, und die Konstruktion wird versagen – „mit Recht“, denn die Aufgabe ist dann prinzipiell unlösbar.

Man kann die Konstruktion etwas vereinfachen, wenn man den Kreis durch irgend zwei der gegebenen Punkte gehen lässt.

Hier wurde der Kreis k speziell so gewählt, dass er durch B und B' geht. Dann fällt Punkt B_1 mit B und Punkt B_2 mit B' zusammen.

Dabei haben die gegebenen Punkte in g dieselbe Lage wie oben.



Weitere Beispiele für Aufgaben 2. Ordnung folgen in den späteren Kapiteln, so z.B. in

Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte: 1. die Konstruktion des gemeinsamen Paares zugeordneter Punkte zu zwei verschiedenen Involutionen in einer Geraden und 2. die Konstruktion eines Punktepaares, das harmonisch zu allen Paaren einer Involution liegt (S. 126f).

Konstruktionsaufgaben für Kegelschnitte: die Konstruktion der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt, von dem fünf Punkte gegeben sind (S. 146).

Satz: Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte des durch vier eigentliche Punkte A, B, C, D aufgespannten Büschels liegen ihrerseits wieder auf einem Kegelschnitt m.
Dieser geht durch die Doppelpunkte der in u_∞ induzierten Involution, und m ist eine Hyperbel oder eine Ellipse, je nachdem die Doppelpunkte reell sind oder nicht.
Der Kegelschnitt m geht außerdem durch die Ecken des Nebendreiecks sowie durch die gewöhnlichen Mittelpunkte der endlichen Strecken in den Vierecksseiten.

A, B, C, D: die Grundpunkte des Büschels.

$P = \overline{AB}\cdot\overline{CD}$,
$Q = \overline{AC}\cdot\overline{BD}$,
$R = \overline{AD}\cdot\overline{BC}$: die Nebenecken.

$p = \overline{QR}$,
$q = \overline{PR}$,
$r = \overline{PQ}$: die Nebenseiten.

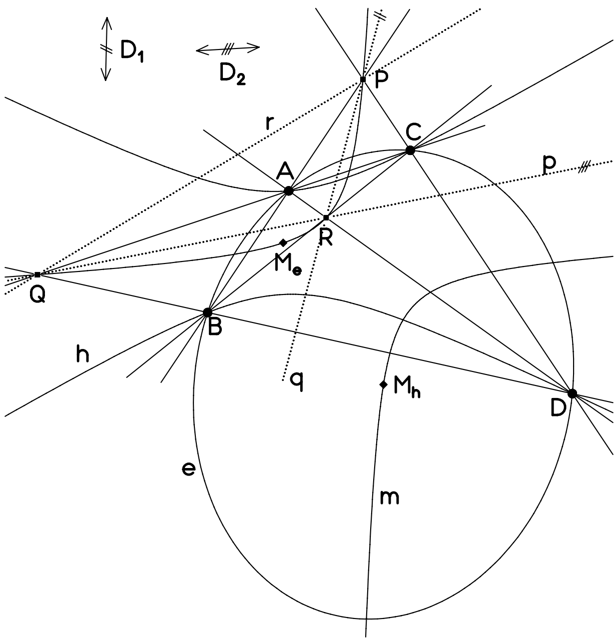
e, h: zwei Kegelschnitte des Büschels.

$(\overline{AB}, \overline{CD})$,
$(\overline{AC}, \overline{BD})$,
$(\overline{AD}, \overline{BC})$ die zerfallenden Kegelschnitte.

M_e, M_h Mittelpunkte von e, h.

m Kegelschnitt der Mittelpunkte.

D_1, D_2 Doppelpunkte der induzierten Involution.



Bemerkung: Es gilt natürlich allgemeiner: Die Pole G aller Kegelschnitte des durch ABCD aufgespannten Büschels bezüglich einer festen Geraden g (die nicht durch einen der Grundpunkte geht) liegen ihrerseits wieder auf einem Kegelschnitt m.
Der Kegelschnitt m geht durch die Ecken des Nebendreiecks sowie durch die harmonischen Mittelpunkte der Strecken in den Viereckseiten bezüglich der jeweiligen Schnittpunkte mit g.
Falls die in g induzierte Involution (reelle) Doppelpunkte besitzt, geht m durch diese.

Bew.: Wir haben zu zeigen, dass die Pole von g bezüglich der Büschelkegelschnitte konstruiert werden können als die Schnittpunkte der Geraden von zwei projektiv aufeinander bezogenen Geradenbüscheln.
Seien S, T die Schnittpunkte zweier Nebenseiten p, q mit g (Zeichnung S.136). Sei s eine beliebige Gerade der Nebenecke P. Nach dem Hilfssatz existiert ein Kegelschnitt k des Büschels, für den s die Polare von S ist; für diesen geht die Polare t von T durch die Nebenecke Q (weil T auf q liegt), und der Schnittpunkt $s\cdot t$ ist der Pol G von g.
Außerdem sind die Geradenbüschel P(s) und Q(t) als zueinander projektiv nachgewiesen; der Schnittpunkt entsprechender Geraden beschreibt also einen Kegelschnitt. Dieser geht durch P und Q als die Grundpunkte der Geradenbüschel.

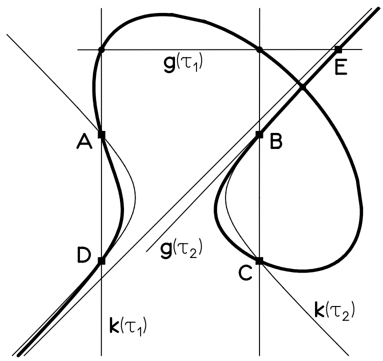
Satz: Wenn eine Kubik drei Wendepunkte hat, dann liegen sie in einer Geraden.

In Darstellungen der Kubiken vom Standpunkt der algebraischen Geometrie findet man, dass eine Kubik stets 9 Wendepunkte hat; von diesen sind aber 6 oder 8 Punkte komplex.

Beispiele:

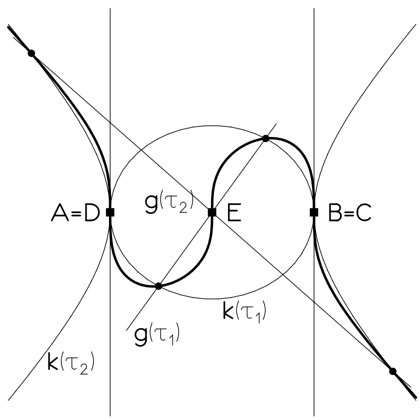
Eine c^3 mit Doppelpunkt

Es kann dann an Singularitäten außer dem Doppelpunkt nur noch genau einen Wendepunkt geben.
Die Projektivität ist dieselbe wie oben, nur E hat eine andere Lage. Eingezeichnet sind wieder zwei Paare von zugeordneten Elementen des Kegelschnitts- und des Geradenbüschels: Der Kegelschnitt zum Parameter $\tau_1 = \infty$ zerfällt in das Geradenpaar $\overline{AD}$, $\overline{BC}$.
Der Kegelschnitt zu τ_2 geht durch den Doppelpunkt und berührt dort die Kurve. Natürlich geht auch die zugeordnete Gerade durch den Doppelpunkt.
Die Kurve ist von 4. Klasse, d.h. es gibt Punkte, die 4 Tangenten, aber nicht mehr, an die Kurve senden.



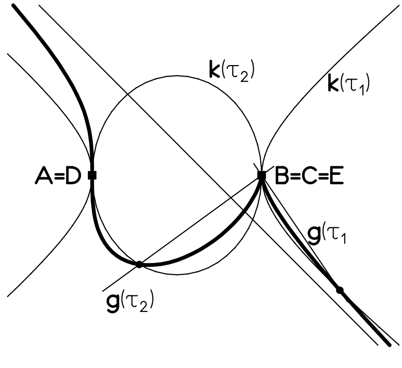
Eine einteilige c^3 mit drei Wendepunkten

Das Büschel der Kegelschnitte wird jetzt von zweimal zwei zusammenfallenden Punkten getragen. E liegt in der Mitte, die projektive Zuordnung wird durch $\sigma = \frac{1}{\tau}$ vermittelt (bei sonst entsprechenden Büschelgleichungen wie oben).
Eingezeichnet ist auch wieder einer der zerfallenden Kegelschnitte, nämlich das Paar von Geraden durch A = D bzw. B = C. Sie sind Tangenten aller Kegelschnitte und natürlich auch der Kubik.
Der zweite zerfallende Kegelschnitt besteht aus der doppelt zu zählenden Gerade $\overline{AB} = \overline{CD}$.
Die Kurve ist ebenfalls von der 4. Klasse.



Eine c^3 mit Spitze

Kegelschnittsbüschel und projektive Zuordnung sind unverändert ($\sigma = \frac{1}{\tau}$), nur der Träger des Geradenbüschels ist jetzt einer der Grundpunkte des Kegelschnittsbüschels. Es entsteht dann eine sog. rationale Kubik (s. S. 169); jede Gerade des Büschels in E trifft die Kurve in genau einem weiteren Punkt.
Sie berührt wie oben die Kegelschnitte des Büschels in dessen Grundpunkten.
Außer der Spitze gibt es als einzige Singularität nur noch einen Wendepunkt.
Die Kurve ist von der 3. Klasse: Es gibt Punkte (in der Nähe des Wendepunktes), die drei Tangenten an die Kurve senden, aber keine mit mehr Tangenten.



Eigenschaften der Zentralkollineationen

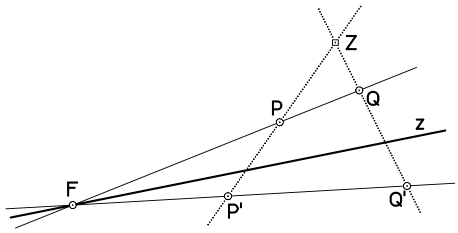
Als erstes werden die Grundkonstruktionen angegeben, z.T. wiederholt. Ihre Richtigkeit folgt aus dem oben Angegebenen, z.T. auch durch duale Übertragung.
Es ist zu empfehlen, diese Grundkonstruktionen sehr gut zu üben, so dass sie mit großer Sicherheit beherrscht werden. Dabei ist es gut, auch alle denkbaren Sonderfälle mit heranzuziehen: insbesondere, dass Z und z inzidieren; ferner, dass eines oder mehrere der gegebenen oder gesuchten Elemente Fernelemente sind. Auch die Achse z oder / und das Zentrum Z sind als Fernelemente möglich. Eine weitere Variation besteht darin, die Bildelemente als gegeben und die Urbilder als gesucht zu betrachten.

Grundkonstruktionen:

1) Gegeben Z, z, P, P'
sowie ein Punkt Q.
Gesucht: das Bild Q'.

$Q' = \overline{ZQ}\cdot\overline{FP'}$ mit $F = \overline{PQ}\cdot z$,
dem Fixpunkt der Geraden $\overline{PQ}$.

Kurz: $Q' = \overline{ZQ}\cdot\overline{(\overline{PQ}\cdot z)\cdot P'}$

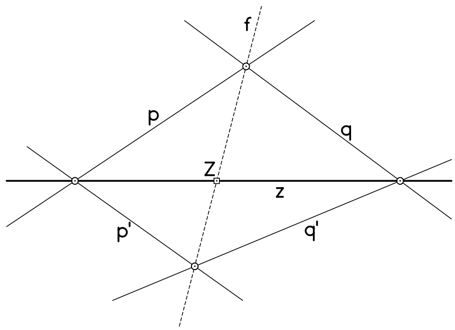


2) Gegeben: Z, z, p, p'
sowie eine Gerade q.
Gesucht: q'.

$q' = \overline{(z\cdot q)(f\cdot p')}$ mit $f = \overline{(p\cdot q)Z}$,
der Fixgeraden durch p·q.

Kurz: $q' = \overline{(z\cdot q)(\overline{(p\cdot q)Z}\cdot p')}$.

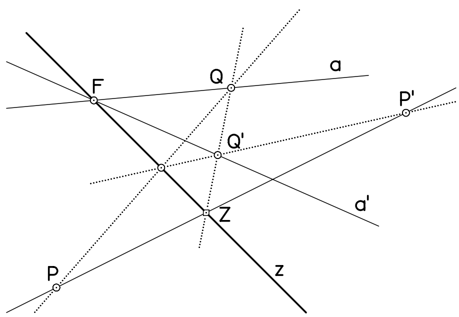
<u>Bemerkung</u>: Z liegt in z,
also liegt hier eine Elation vor.
Die Konstruktion ändert sich überhaupt nicht, wenn Z nicht mit z inzidiert.



3) Gegeben Z, z, P, P'
sowie eine Gerade a.

Gesucht: das Bild a'.

Dazu wähle man einen beliebigen Punkt Q in a und bilde diesen gemäß 1) ab.
Die Bildgerade a' ist dann bestimmt durch Q' und den Fixpunkt F von a, d.h. den Schnittpunkt von a und z.



Kegelschnitte und Matrizen

Kegelschnittsgleichungen in Matrizenform

Ein Kegelschnitt wird durch eine Gleichung 2. Grades dargestellt, und wenn man auch zerfallende und „nullteilige" Kegelschnitte zulässt, dann stellt auch jede Gleichung 2. Grades einen Kegelschnitt dar. „Nullteilig" ist dabei ein Gebilde, dessen sämtliche Punkte imaginäre (oder komplexe) Koordinaten haben, z.B. der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = -1$.

In homogenen Koordinaten ist die allgemeinste Gleichung 2. Grades

$$a_{00}\cdot x_0^2 + a_{01}\cdot x_0x_1 + a_{02}\cdot x_0x_2 + a_{10}\cdot x_1x_0 + a_{11}\cdot x_1^2 + a_{12}\cdot x_1x_2 + a_{20}\cdot x_2x_0 + a_{21}\cdot x_2x_1 + a_{22}\cdot x_2^2 = 0$$

für irgendwelche Konstanten a_{ij}, die natürlich nicht alle verschwinden dürfen. Man erkennt unmittelbar, wie sich hier eine Matrizenschreibweise anbietet, aber wir nehmen noch eine Vereinfachung vor.
Natürlich kann man die Terme mit gleichen Potenzen zusammenfassen:

$$b_{00}\cdot x_0^2 + b_{01}\cdot x_0x_1 + b_{02}\cdot x_0x_2 + b_{11}\cdot x_1^2 + b_{12}\cdot x_1x_2 + k_{22}\cdot x_2^2 = 0$$

mit $b_{00} = a_{00}$, $b_{11} = a_{11}$, $b_{22} = a_{22}$, $b_{01} = a_{01} + a_{10}$, $b_{02} = a_{02} + a_{20}$, $b_{12} = a_{12} + a_{21}$.
Noch zweckmäßiger ist aber eine andere Form, die man nämlich erhält, wenn man die Koeffizienten der gemischten Terme in zwei gleiche aufteilt; dann nämlich wird die Matrix, die wir gleich anschließend aus den Koeffizienten bilden wollen, symmetrisch. Das hat Vorteile mehrerlei Art: Über symmetrische Matrizen gibt es schöne Sätze, die vieles vereinfachen, aber es gibt auch geometrische Gründe, die im Zusammenhang mit den Korrelationen stehen. Damit also:

$$k_{00}\cdot x_0^2 + k_{01}\cdot x_0x_1 + k_{02}\cdot x_0x_2 + k_{10}\cdot x_1x_0 + k_{11}\cdot x_1^2 + k_{12}\cdot x_1x_2 + k_{20}\cdot x_2x_0 + k_{21}\cdot x_2x_1 + k_{22}\cdot x_2^2 = 0$$

mit $k_{00} = a_{00}$, $k_{11} = a_{11}$, $k_{22} = a_{22}$, $k_{01} = k_{10} = \frac{1}{2}b_{01} = \frac{1}{2}(a_{01} + a_{10})$ u.s.w.

Die Koeffizienten k_{ij} fassen wir zu einer Matrix $\mathbf{K}$, der Koeffizientenmatrix des Kegelschnitts zusammen, und damit reduziert sich die Gleichung zu

$$\mathbf{x}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x} = 0$$

Und dabei ist also $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{01} & k_{11} & k_{12} \\ k_{02} & k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}$

Ganz nebenbei: Ist die Matrix 4-reihig, dann wird durch diese Gleichung eine Quadrik im 3-dimensionalen Raum beschrieben in den homogenen Koordinaten $(x_0{:}x_1{:}x_2{:}x_3)$.

Transformation der Matrix unter einer projektiven Abbildung

Sei ein Kegelschnitt (oder eine Quadrik) k gegeben durch $\mathbf{x}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x} = 0$, eine projektive Abbildung sei gegeben durch $\mathbf{x'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$, dann hat das Bild k' von k die Gleichung $\mathbf{x}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K'}\cdot\mathbf{x} = 0$ und dabei ist

$$\mathbf{K'} = (\mathbf{A}^{-1})^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{A}^{-1}$$

Denn aus $\mathbf{x}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x} = 0$ oder $0 = \mathbf{x}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}$ folgt mit $\mathbf{x'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$, also $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{x'}$ sofort, dass
$0 = (\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{x'})^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{x'} = \mathbf{x'}^\mathbf{T}\cdot(\mathbf{A}^{-1})^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{x'} = \mathbf{x'}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K'}\cdot\mathbf{x'}$, wenn $\mathbf{K'} = (\mathbf{A}^{-1})^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{A}^{-1}$.

Leicht einzusehen ist, dass $\mathbf{K'}$ symmetrisch sein muss, wenn $\mathbf{K}$ symmetrisch ist. Dabei ist natürlich für die Symmetrie einer Matrix $\mathbf{M}$ kennzeichnend, dass sie mit ihrer Transponierten übereinstimmt: $\mathbf{M}^\mathbf{T} = \mathbf{M}$. Es gilt nämlich

$\mathbf{K'}^\mathbf{T} = [(\mathbf{A}^{-1})^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{A}^{-1}]^\mathbf{T} = (\mathbf{A}^{-1})^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K}^\mathbf{T}\cdot((\mathbf{A}^{-1})^\mathbf{T})^\mathbf{T} = (\mathbf{A}^{-1})^\mathbf{T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{K'}$,

weil 1. $\mathbf{K}^\mathbf{T} = \mathbf{K}$ nach Voraussetzung und weil 2. die doppelte Transponierung sich aufhebt.

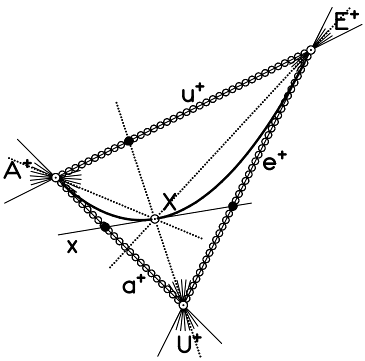
Im nächsten Schritt wird es dann darum gehen, weitere Eigenschaften solcher singulärer oder regulärer Linienelemente einzusehen, die sich als Folgerung aus den Grundeigenschaften ergeben und die geeignet sind, die naive Kurvenanschauung durch exakt gewonnene Gesetzmäßigkeiten zu ergänzen.

Danach können wir dazu übergehen, ganz in sich geschlossene Kurven ins Auge zu fassen und deren Eigenschaften zu untersuchen. Wir werden dabei Bögen und Kurven nicht analytisch und auch nicht durch eine Konstruktion vorgeben, sondern einfach graphisch mitteilen; es wird dann darum gehen, die naiv erkennbaren Eigenschaften solcher gezeichneter Kurvenstücke zu beschreiben – dabei aber für diese Beschreibung mathematisch exakte Begriffe anzugeben, die sich dann auch fruchtbar auf solche Fälle anzuwenden lassen, die der Anschauung nicht direkt zugänglich sind.

Die Struktur des einfachen Bogens

Sei ein einfacher Bogen vorliegend mit Anfangselement A∗a und Endelement E∗e. Er werde von dem Linienelement X∗x von Anfang bis Ende durchlaufen. Ist P∗p irgendein ausgewähltes Linienelement des Bogens, so bewegt sich nach der Erklärung des einfachen Bogens p·x gleichförmig in p und zwar von p·a bis p·e; passiert dabei x die Tangente p, so wird die Lücke p·p (der Schnittpunkt ist dann unbestimmt) durch den Berührpunkt P geschlossen. Das gilt auch dann, wenn wir für P∗p das Anfangselement A∗a wählen:

Dann bewegt sich a·x gleichförmig in a von A (= a·a) bis U (= a·e) und ebenso e·x von U (= e·a) bis E (= e·e). Diejenige Strecke in a, die dabei von a·x überstrichen wird, bezeichnen wir mit a^+, die andere mit a^- und weiter die von e·x in e überstrichene Strecke mit e^+, das Komplement mit e^-.



Dual dreht sich $\overline{AX}$ von a (= $\overline{AA}$) bis u (= $\overline{AE}$) gleichförmig um A, und ebenso $\overline{EX}$ von u (= $\overline{EA}$) bis e (= $\overline{EE}$). Denjenigen Winkel in A, der dabei von $\overline{AX}$ überstrichen wird, bezeichnen wir mit A^+, den ergänzenden mit A^- und weiter den von $\overline{EX}$ in E überstrichenen Winkel mit E^+, den komplementären mit E^-.

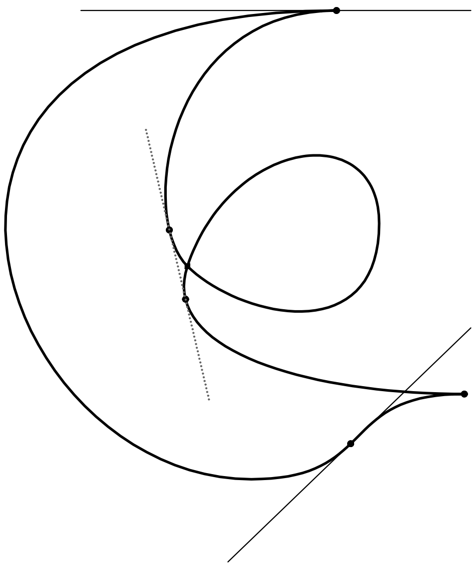
In der Zeichnung wurden die mit dem Vorzeichen + signierten Strecken bzw. Winkel hervorgehoben und auch schon diejenigen in u bzw. in U, die in Bälde eingeführt werden.

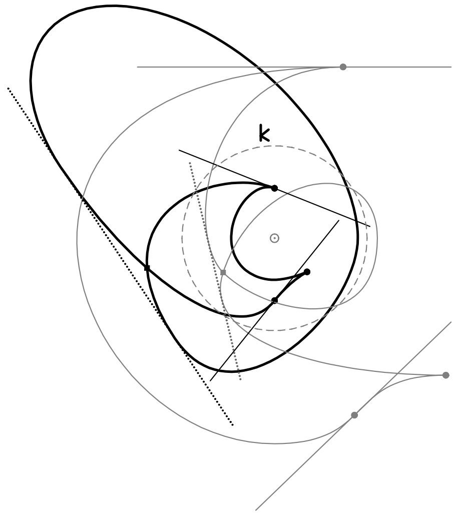
Kein Element P∗p kann ein singuläres Element (im bisher behandelten Sinne) sein, da sonst die Bewegung von $\overline{PX}$ in P oder diejenige von p·x in p keine einfache Bewegung wäre, wie es in der Erklärung gefordert ist. Auch kann P kein mehrfacher Punkt und p keine mehrfache Tangente sein, da sonst die Bewegung von $\overline{AX}$ in A bzw. diejenige von a·x in a die Bewegungsrichtung umkehren müsste (ohne eine solche kommt man nicht dahin zurück, wo man schon einmal war). Es gibt also auch keine globalen Singularitäten (s. S. 288).

Unmittelbar einzusehen ist, dass für jeden einfachen Bogen (A∗a ... E∗e) auch der rückwärts durchlaufene Bogen (E∗e ... A∗a) ein einfacher Bogen ist. Und weiter, dass für beliebige Elemente P∗p sowie Q∗q des Bogens auch (P∗p ... Q∗q) ein einfacher Bogen ist.

Wir fassen diese einfachen Tatsachen zusammen in den

Wir stellen uns nun die Aufgabe, eine Kurve zu finden, welche alle Singularitäten – Dornspitze, Wendestelle und Schnabelspitze sowie Doppelpunkt und Doppeltangente – genau einmal enthält. Mit einiger Mühe findet man als eine mögliche Lösung die folgende Kurve. Sie ist von 6. Ordnung und 6. Klasse. Durch Polarisieren erhält man eine weitere Möglichkeit.



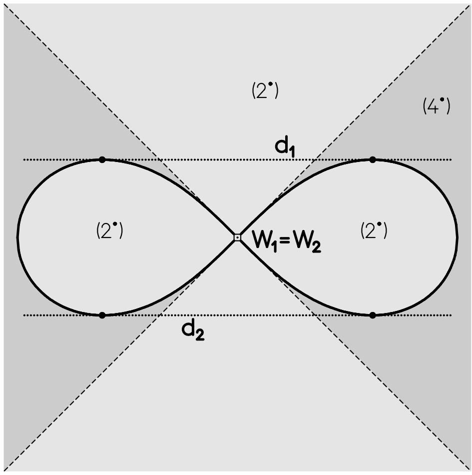


Es gibt noch mindestens zwei weitere Möglichkeiten. Wer sucht, der findet!

Eine weitere Variation ist die Kurve mit denselben Singularitäten, aber z.B. von der 12. Klasse (im Unterricht einer 12. Klasse mag eine solche Kurve auf Interesse stoßen). Man hat dazu lediglich das Kurvenstück mit der Schnabelspitze in ausreichend viele Windungen zu verlängern.

Als ein weiteres Beispiel wählen wir die Lemniskate. Für diese sollen verschiedene polare Formen angegeben werden, um das Verständnis dafür zu befestigen, dass zueinander äquivalente Kurven (d.h. Kurven, die zu ein und derselben Kurve polar sind, also dieselben Singularitäten, dieselbe Ordnung und Klasse besitzen) höchst verschiedenes Aussehen haben können. Dabei beschränken wir uns aber auf symmetrische Kurven, indem wir den Mittelpunkt des Polarisatorkreises auf den Symmetrieachsen der Lemniskate wählen.

Die Lemniskate ist eine Kurve 4. Ordnung und 4. Klasse. An Singularitäten hat sie zwei Wendepunkte W_1, W_2 und einen Doppelpunkt, wobei dieser gerade aus den Wendepunkten besteht; außerdem gibt es zwei Doppeltangenten d_1, d_2. Die Lemniskate selber und ihre Doppelpunkts- und Wendetangenten gliedern die Punkte der Ebene in drei $2^{\bullet}$-Gebiete und ein $4^{\bullet}$-Gebiet.



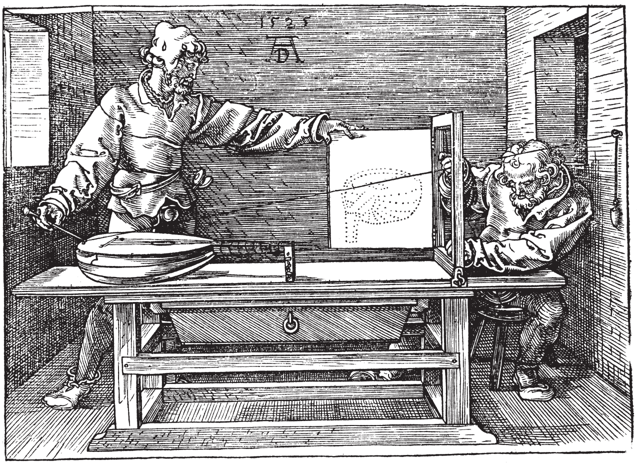
Da kein $0^{\bullet}$-Gebiet vorkommt, nur $2^{\bullet}$- und $4^{\bullet}$-Gebiete, kann keine polare Form existieren, die ganz im Endlichen verläuft; jede polare Form muss die Ferngerade zweimal oder viermal überqueren.

Historische Bemerkungen

Die projektive Geometrie ist ein verhältnismäßig neues Gebiet der Mathematik, auch wenn einige Wurzeln in frühere Zeiten zurückreichen: ihre eigentliche Ausgestaltung erfuhr sie im 19. Jahrhundert.

ALBRECHT DÜRER (1471 – 1528)

Die ersten Überlegungen zu projektiven Eigenschaften geometrischer Figuren stammen interessanterweise nicht von Mathematikern, auch nicht von Naturwissenschaftlern, sondern von den Malern der beginnenden Renaissance, die mit dem aufkommenden modernen Bewusstsein die Dinge so darstellen wollten, wie man sie sieht (oder muss man sagen: wie man sie damals zu sehen lernte?), nämlich perspektivisch. So entwickelten sie die Lehre von der Zentralperspektive. Als erstes perspektivisch exaktes Gemälde betrachten die Kunsthistoriker die „Dreifaltigkeit" von MASACCIO (1401 – 1428) in der Kirche Santa Maria Novella in Florenz. Das erste Buch über Konstruktionen der Perspektive in deutscher Sprache stammt von DÜRER: „Underweysung der messung …", 1525:



Durch drey feden magst du ein yetlich ding, das du mit erreychen kannst in ein gemel bringen / auf ein dafel zů verzeychnen / dem tu also

Pist du in einem sal so schlag eine grosse nadel mit einem weyten ör die darzů gemacht ist in ein wand / und setz das für ein aug / dardurch zeuch einen starcken faden / und henck unden ein pley gewicht daran / darnach setz einen tisch oder tafel so weyt von dem nadel ör darinn der faden ist alß du wilt / darauf stell stet ein aufrechte ram zwerchs gegen dem nadel ör hoch oder nider auf weliche seyten du wilt / die ein türlein hab das man auf und zů müg tan / diß thürlein sey dein tafel darauf du malen wilt. Darnach nagel zwen feden die als lang sind als die aufrechte ram lang und preyt ist oben und mitten in die ram und den andren auf einer seyten auch mitten in die ram und laß sie hangen. Darnach mach ein eysnen langen steft der zů forderst am spitz ein nadel ör hab / dareyn feden den langen faden der durch das nadel ör an der wand gezogen ist / und far mit der nadel unnd langen faden durch die ram hinauß / und gib sie einem anderen in die hand / und wart du der anderen zweyer feden die an der ram hangen. Nůn brauch diß also / leg ein lauten oder was dir sunst gefelt so fern von der ram als du wilt / und das sie unveruckt peleyb solang du ir bedarfft / und lass deinen gesellen die nadel mit dem faden hinauß strecken / auf die nöttigisten puncte der lautten / und so oft er auf einem still helt unnd den langen faden anstreckt / so schlag alweg die zwen feden an der ram kreutzweyß gestrackes an den langen faden / und kleb sie zů peden orten mit einem wachs an die ram / und heyß deinen gesellen seinen langen faden nach lassen. Darnach schlag die türlein zů unnd zeychen den selben puncten da die feden kreutzweyß uber einander gen auf die tafel / darnach thů das türlein