2.4 Gliederung der Ebene durch 6 Elemente

1. durch 6 Geraden (von denen nicht drei durch einen Punkt gehen) kann man, je nach Lage dieser Geraden, z.B.
   10 Dreiseite und 6 Fünfseite oder
   6 Dreiseite, 9 Vierseite und 1 Sechsseit oder
   6 Dreiseite, 8 Vierseite und 2 Fünfseite oder
   7 Dreiseite, 6 Vierseite und 3 Fünfseite erhalten.[4]

2. durch 6 Punkte (von denen nicht drei in einer Linie liegen) kann man, je nach Lage dieser Punkte, z.B.
   10 Dreiecke und 6 Fünfecke oder
   6 Dreiecke, 9 Vierecke und 1 Sechseck oder
   6 Dreiecke, 8 Vierecke und 2 Fünfecke oder
   7 Dreiecke, 6 Vierecke und 3 Fünfecke erhalten.

3 Der Bogen

3.1 Vorbetrachtung

Laufen wir eine Kurve, so lebt deren Dynamik zunächst am stärksten in dem verschiedenartigen Krümmungsverhalten. Im Extrem kann sie sich zur Geraden strecken (Krümmung null) oder zum Punkt krümmen (unendliche Krümmung). In der Geraden wird die Bewegung zu einem geradlinigen Fortschreiten, es gibt keine Richtungsänderung. Im Punkt ist als Bewegung nur noch die Drehung möglich. Es gibt kein Fortschreiten mehr, nur noch Richtungsänderung. Laufen wir eine gewöhnliche Kurve, so schreiten wir fort und drehen uns dabei. Die Punkte der Kurve geben die durchlaufenen Orte an, die Tangenten die sich ändernden Richtungen. Punkt und Gerade, Fortschreiten und Drehen sind für die ebenen Kurven die dualen Entsprechungen, zwischen denen sie sich bewegen.

3.2 Definition des Bogens

Wird eine Strecke (Punktmenge) gekrümmt, so erhalten wir einen Bogen:

[4] In einer früheren Version dieses Aufsatzes wird noch als Möglichkeit genannt: 7 Dreiseite, 8 Vierseite und 1 Fünfseit. Weil der Beweis der Unmöglichkeit so schön ist, sei er hier mitgeteilt:
Wir zählen die Kanten Gebiet für Gebiet, die diese Konfiguration haben müsste: $\frac{7\cdot 3+8\cdot 4+1\cdot 5}{2} = 29$, wobei die Division mit 2 die Tatsache, dass alle Kanten doppelt gezählt wurden, wieder aufhebt. Andererseits liegen auf jeder Geraden 5 Ecken (die Schnittpunkte mit den übrigen 5 Geraden), so dass man insgesamt $6 \cdot 5 = 30$ Kanten haben muss.

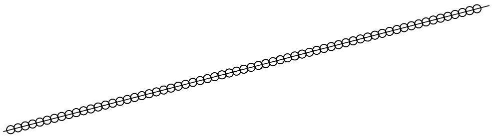

Abbildung 38: Punktreihe

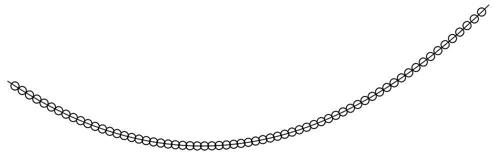

Abbildung 39: Punktreihe

Welcher Vorgang entspricht dual diesem Krümmen im Geradenfeld? Dort müssen wir nicht von einem Stück geraden Weges, sondern von einem Stück Drehung ausgehen, einem Winkel. Um den analogen Vorgang zum Krümmen zu finden, überlegen wir, was den Bogen von der Strecke unterscheidet. Offenbar liegen keine drei Punkte mehr in einer und derselben Geraden. Entsprechend werden wir den Winkel so umzuwandeln haben, dass keine drei Geraden mehr durch einen Punkt gehen. Der Winkel wird zu einer Bogenhülle aufgelöst: Die Geraden hüllen als Tangenten einen einfachen Bogen ein.

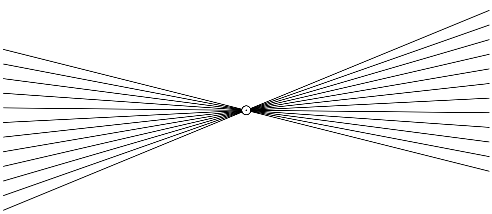

Abbildung 40: Geradenbüschel

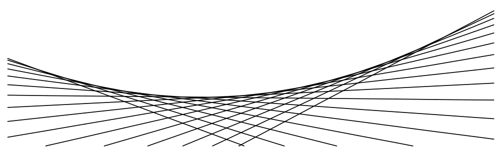

Abbildung 41: Geradenbüschel

Wir sehen, dass wir bei diesen dualen Vorgängen *„krümmen"* und *„auflösen"* zu einer ähnlichen Form kommen. Der aufgelöste Winkel bestimmt als Hülle einen Bogen. In jeder Geraden dieses Hüllbogens liegt ein Punkt des Bogens. Wie finden wir für eine beliebige Gerade p des Hüllbogens diesen Bogenpunkt?

Eine Gerade x durchlaufe die Geradenmenge. Wir verfolgen die Bewegung des Schnittpunktes $p \cdot x$, des Spurpunktes der beweglichen Geraden x in der festen Geraden p. Nähert sich x der Geraden p, so wird der Spurpunkt $p \cdot x$ in einem Moment unbestimmt, wenn nämlich x in p fällt. Sobald x aber p überschritten hat, ist der Spurpunkt $p \cdot x$ wieder eindeutig bestimmt. Es gibt aber genau einen Punkt P von p, der diese Lücke schließt: das ist der in p liegende Punkt des zugehörigen Bogens, der Berührpunkt P der Tangente p.

Betrachten wir den Bogen als gekrümmte Punktreihe, so können wir die duale Untersuchung durchführen:

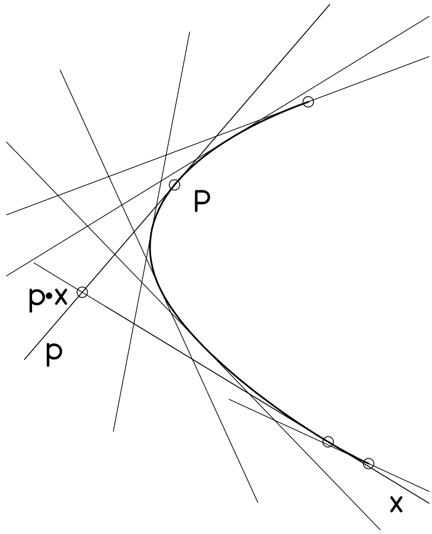

Abbildung 42

Ein Punkt X durchlaufe die Punktmenge auf einen festen Punkt P hin. Wir verfolgen die Bewegung der Verbindungsgeraden $\overline{\mathrm{PX}}$. Nähert sich X dem Punkt P, so wird die Verbindungsgerade $\overline{\mathrm{PX}}$ in einem Moment unbestimmt, wenn nämlich X in P fällt. Sobald X aber P überschritten hat, ist die Gerade wieder eindeutig bestimmt. Es gibt aber genau eine Gerade p von P, die diese Lücke schließt: die Tangente p in P.

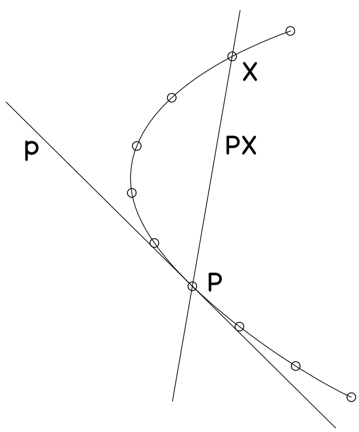

Abbildung 43

Wenn in dieser Weise für jedes feste Element $\mathrm{P} * p$

1. die Bewegung von $p \cdot x$ auf p ohne Umkehrung der Bewegungsrichtung verläuft und außerdem die Bewegung lückenlos ist mit der einzigen Ausnahme in dem Falle, dass X in P fällt;

2. die Drehung von $\overline{\mathrm{PX}}$ in P ohne Umkehrung der Drehrichtung verläuft und außerdem die Drehung lückenlos ist mit der einzigen Ausnahme in dem Falle, dass x in p fällt;

3. die Lücke in 1. genau durch den Berührpunkt P und ebenso die Lücke in 2. genau durch die Tangente p geschlossen wird, dann wollen wir den Bogen einen *einfachen Bogen* nennen.

Ferner soll der einfache Bogen einen Anfangspunkt A mit Tangente a und einen Endpunkt E mit Tangente e – oder kurz ein Anfangselement A$*a$ und ein Endelement E$*e$ – besitzen, denn wir vereinbaren die folgende

Definition: Ein Punkt P des Bogens und seine Tangente p stellen ein *Element* P*p des Bogens dar.

Wir können somit den Bogen als Punkt- und Geradengebilde zugleich ansehen, wobei keine Betrachtungsart vor der anderen ausgezeichnet ist. Der Bogen erscheint als Ergebnis des Zusammenwirkens von Punkt- und Geradenfeld. Der Bogen ist *in sich dual*.

Von einem *elementaren Bogen* reden wir dann, wenn mehrere einfache Bögen so zusammengesetzt sind, dass das Endelement eines jeden (außer evt. des letzten) genau das Anfangselement des folgenden ist.

Eine *Elementarkurve* schließlich ist ein elementarer Bogen, der in sich geschlossen ist, bei dem also Anfangselement und Endelement zusammen fallen: A = E *und* $a = e$.

Für eine mathematisch präzise und vollständige Darstellung sei verwiesen auf:

- L. Locher-Ernst, Einführung in die Freie Geometrie ebener Kurven, Basel 1952.
- A. Stolzenburg, Projektive Geometrie, Stuttgart 2009, S. 268 ff.

3.3 Gliederung der Ebene durch einen einfachen Bogen

Betrachten wir einen einfachen Bogen, so fällt uns auf, dass die Ebene als Punktfeld nicht gleichmäßig von den Geraden des Bogens überstrichen wird. Es gibt Punkte, durch die eine, wieder andere, durch die keine Gerade geht (Abbildung 44). So erkennen wir: Durch einen Bogen wird das Punktfeld in verschiedene Gebiete gegliedert. Von einem Punkt des Punktfeldes werden an den Bogen gesandt:

- Im Gebiet $(2^\bullet)$ zwei Tangenten,
- im Gebiet $(1^\bullet)$ eine Tangente,
- im Gebiet $(0^\bullet)$ keine Tangente.

Die Grenzen der Gebiete werden von den Endtangenten *a* und *e* des Bogens und dem Bogen als Punktmenge gebildet.

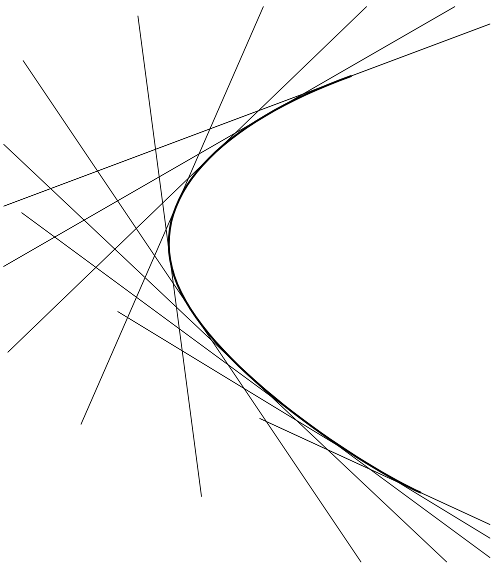

Abbildung 44

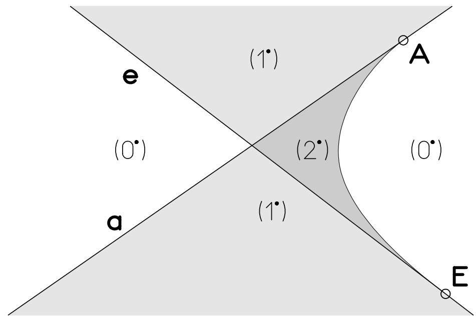

Abbildung 45

Dual entsprechend wird das ebene Geradenfeld durch den Bogen in drei Geradenbereiche gegliedert:

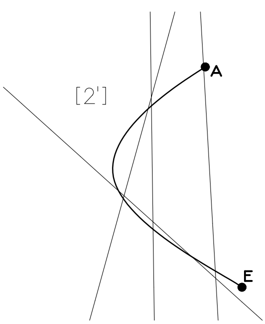

Abbildung 46

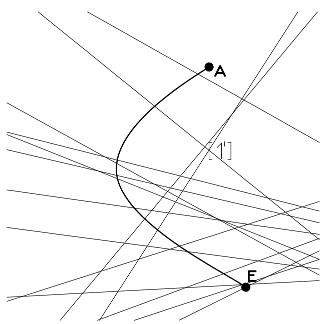

Abbildung 47

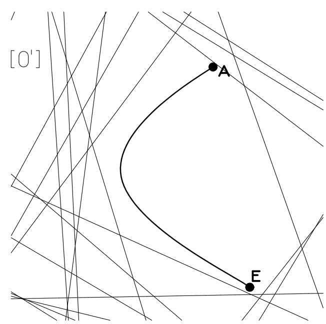

Abbildung 48

Der Bereich $[2']$ besteht aus allen Geraden, die den Bogen in zwei Punkten treffen, der Bereich $[1']$ besteht aus allen Geraden, die den Bogen in einem Punkt treffen, der Bereich $[0']$ besteht aus allen Geraden, die den Bogen in keinem Punkt treffen. Die Grenzen der Bereiche werden von den Endpunkten A und E des Bogens und dem Bogen als Geradenmenge gebildet.

3.4 Spezielle Bögen

Wir haben bisher ausschließlich einfache Bögen betrachtet. Verlängert man nun einen einfachen Bogen, so erreicht man notwendigerweise einmal ein Element, mit welchem der Bogen aufhört, einfach zu sein. Es kann dies auf zwei Arten eintreten:

1. Man gelangt zu einem Endelement E$*e$, für welches die Gerade e den Anfangspunkt enthält (e durch A. Abbildung 49), oder

2. Man gelangt zu einem Endelement E$*e$, für welches der Punkt E der Anfangsgeraden angehört (E in a, Abbildung 50). Im 1. Fall ergibt sich eine einwickelnde Spirale, im 2. Fall eine sich auswickelnde Spirale. Einen solchen Bogen nennen wir einen *Spiralbogen*. Er ist ein in sich duales Gebilde.

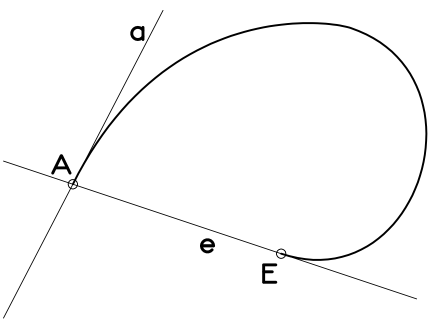

Abbildung 49: E durch a

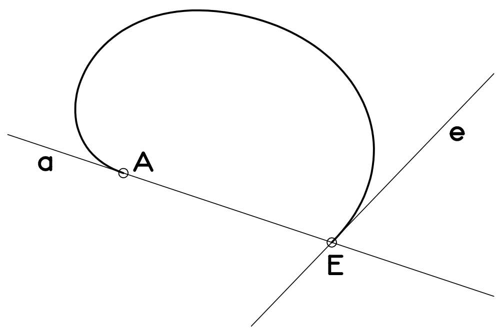

Abbildung 50: E in a

Wenn nun A = E ist, erhalten wir eine Ecke:

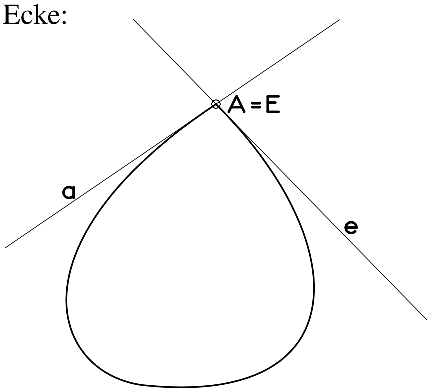

Abbildung 51: Spitzbogen

Wenn nun $a = e$ ist, erhalten wir eine Strecke:

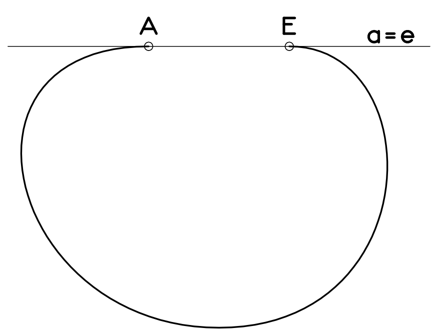

Abbildung 52: Flachbogen

Ist letztlich A = E *und* $a = e$, erhalten wir die *Eilinie* oder das *Oval*:

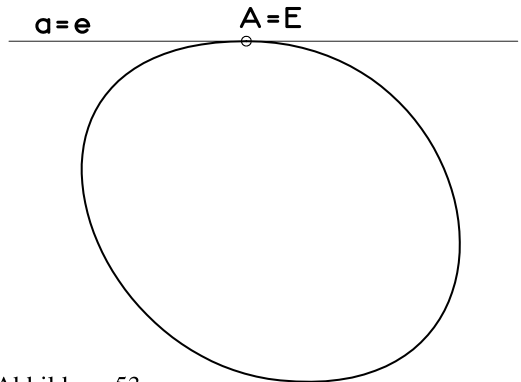

Abbildung 53

Die Eilinie (Oval) steht zwischen den beiden Möglichkeiten der ein- und auswickelnden Spirale, zwischen dem Spitzbogen und dem Flachbogen. Sie ist eine Kurve ohne irgendeine Besonderheit (Singularität).

Als Punktgebilde zerlegt die Eilinie die Ebene als Punktfeld in zwei Gebiete: $(0^\bullet)$ = Innen und $(2^\bullet)$ = Außen.

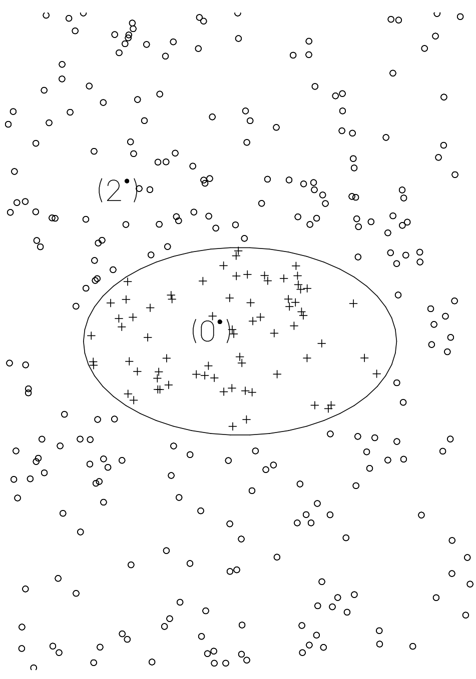

Abbildung 54

Als Geradegebilde zerlegt die Eilinie die Ebene als Geradenfeld in zwei Bereiche: $[0']$ = Innen und $[2']$ = Außen.

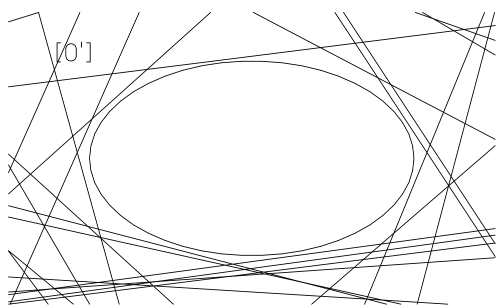

Abbildung 55

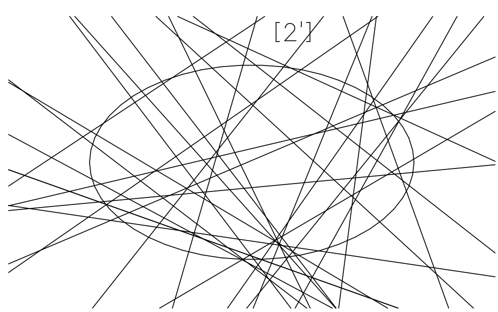

Abbildung 56

4 Kurven

4.1 Vorbemerkungen

Unter einer Kurve versteht man einen geschlossenen, also in sich zurückkommenden Bogen (der auch über das Unendliche geschlossen sein kann). Im vorigen Kapitel haben wir als eine einfache Kurve die Eilinie (Oval) kennen gelernt. Sie hat mit Geraden des Geradenfeldes höchstens 2 Punkte gemeinsam und sendet durch Punkte des Punktfeldes höchstens 2 Tangenten. Ein bekanntes Beispiel für solche Kurven sind die Kegelschnitte. Sie haben keinerlei Besonderheiten („Singularitäten“).

4.2 Singularitäten und andere Besonderheiten an Kurven

Für einen regulären Kurvenpunkt gilt: Jeder Punkt hat genau eine Tangente und jede Tangente gehört genau einem Kurvenpunkt als Berührpunkt an. Wie die Beispiele unten von Kurven zeigen, ergeben sich nur dann die verschiedenen interessanten Kurven, wenn wir Kurvenpunkte zulassen, die nicht regulär sind, sondern Singularitäten besitzen. Einige Beispiele für Kurven mit *Singularitäten* und anderen Besonderheiten:

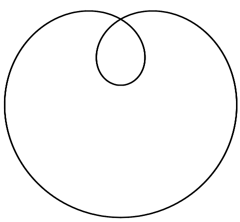

Abbildung 57

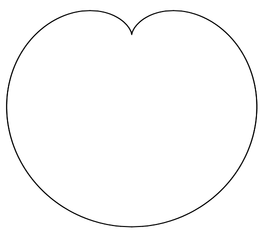

Abbildung 58

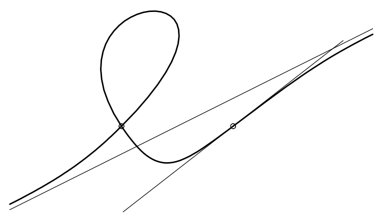

Abbildung 59

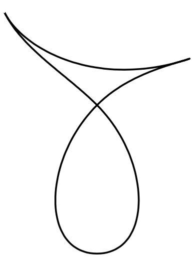

Abbildung 60

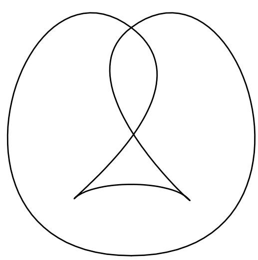

Abbildung 61

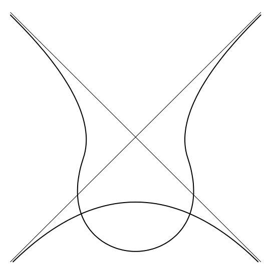

Abbildung 62

Wollen wir ein Kurvenelement P$*p$ auf lokale Singularitäten untersuchen, müssen wir ermitteln, ob im Element der Punkt oder die Gerade oder gar beide ein besonderes Verhalten zeigen. Wir wenden dazu ein Verfahren an: Wir lassen einen beweglichen Punkt X mit seiner Tangente x („Testelement“ X$*x$) den Punkt P mit seiner Tangente p (Element P$*p$) überschreiten. Dabei beobachten wir das Verhalten der Geraden $\overline{\mathrm{XP}} = d$ („Direk-

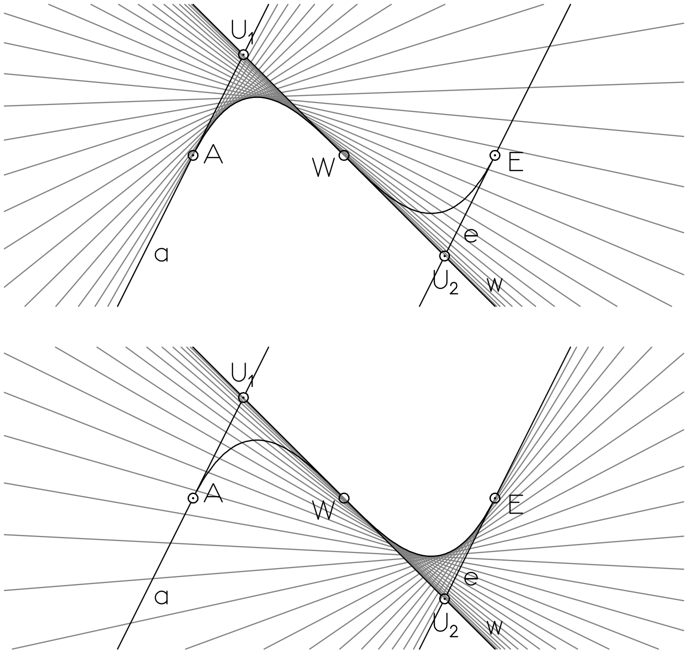

Abbildung 108

Die Gebiete ($0^\bullet$), ($1^\bullet$) und ($2^\bullet$) werden erzeugt durch den einfachen (!) Bogen A...W (oben) bzw. durch W...E (unten). In der Überlagerung der Gebiete der beiden einfachen Bögen entsteht Neues in der Nachbarschaft von W$*w$: ($1^\bullet$)- und ($3^\bullet$)-Gebiete.

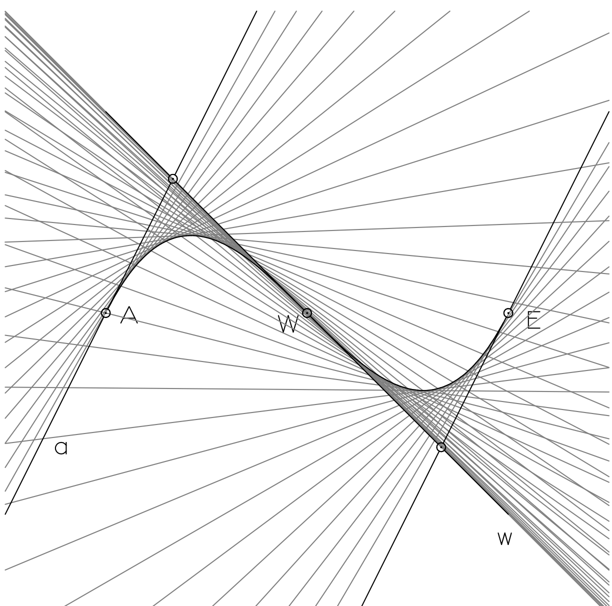

Abbildung 109

4.7 Übungsaufgaben

Dualisiere folgende Kurven (Formen):

1.

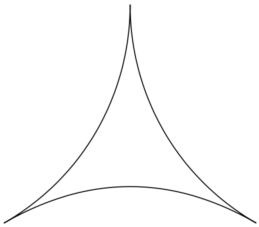

Abbildung 110

3 Dornspitzen	$\leftrightarrow$	3 Wendestellen
kein $(0^\bullet)$-Gebiet	$\leftrightarrow$	kein $[0']$-Bereich
$(1^\bullet)$ vorhanden	$\leftrightarrow$	$[1']$ vorhanden
3. Klasse	$\leftrightarrow$	3. Ordnung
4. Ordnung	$\leftrightarrow$	4. Klasse

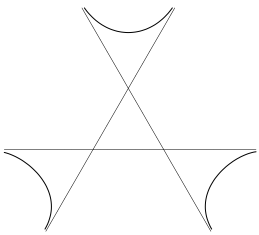

Abbildung 111

oder

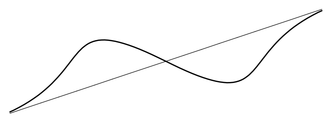

Abbildung 112

2.

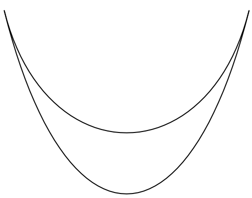

Abbildung 113

2 Schnabelspitzen	$\leftrightarrow$	2 Schnabelspitzen
4. Klasse	$\leftrightarrow$	4. Ordnung
4. Ordnung	$\leftrightarrow$	4. Klasse

Diese Kurve ist *selbstdual*

3.

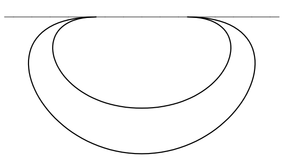

Abbildung 114

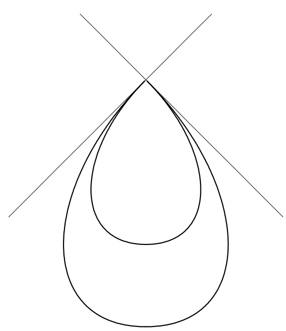

Abbildung 115

2 Schnabelspitzen mit	$\leftrightarrow$	2 Schnabelspitzen mit
1 Doppeltangente	$\leftrightarrow$	1 Doppelpunkt

Einführung in die analytische Geometrie des Raumes

UWE HANSEN

Das Folgende zeigt eine Einführung in die analytische Geometrie des Raumes.

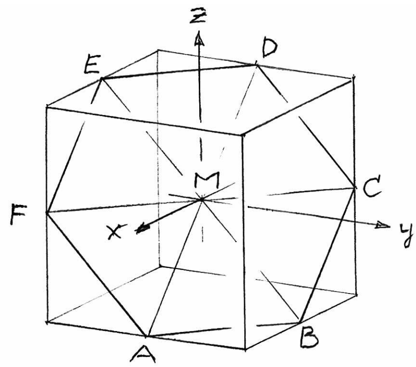

Abbildung 1

In der Abbildung 1 ist ein Würfel mit der Kantenlänge 4 dargestellt, dessen Mittelpunkt M der Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems ist. Die Koordinatenachsen sollen parallel zu den Würfelkanten verlaufen. In diesen Würfel sind sechs Kantenmittelpunkte eingezeichnet, die ein regelmäßiges Sechseck bilden. Die Koordinaten dieser Punkte sind $\mathrm{A}\,(2 \mid 0 \mid -2)$, $\mathrm{B}\,(0 \mid 2 \mid -2)$, $\mathrm{C}\,(-2 \mid 2 \mid 0)$, $\mathrm{D}\,(-2 \mid 0 \mid 2)$, $\mathrm{E}\,(0 \mid -2 \mid 2)$, $\mathrm{F}\,(2 \mid -2 \mid 0)$.

Um vom Punkt A zum Punkt B zu gelangen, kann man zwei Schritte in Richtung der negativen x-Achse – zwei Schritte „zurück" – und dann zwei Schritte in Richtung der positiven y-Achse – zwei Schritte „nach rechts" – gehen (oder zuerst zwei Schritte nach rechts und dann zwei Schritte zurück gehen). Wir stellen diesen Weg dar durch

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hier bedeutet die erste Zahl die Anzahl der Schritte in Richtung der positiven x-Achse, die zweite Zahl die Anzahl der Schritte in Richtung der positiven y-Achse und die dritte Zahl die Anzahl Schritte in Richtung der positiven z-Achse – nach „oben". In welcher Reihenfolge die einzelnen Schritte durchgeführt werden, spielt offenbar keine Rolle. Entsprechend kann man darstellen:

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da auch $\overrightarrow{\mathrm{ED}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $\overrightarrow{\mathrm{FM}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ erkennt man, dass die Darstellung $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ jeden Weg darstellt, der von einem beliebigen Ausgangspunkt ausgehend die x-Koordinate um 2 verringert, die y-Koordinate um 2 vergrößert und die z-Koordinate unverändert lässt. Diese Darstellung bezeichnet also die Verschiebung, wir sagen den Vektor, der den Punkt $\mathrm{P}\,(x \mid y \mid z)$ überführt in den Punkt $\mathrm{P}'\,(x-2 \mid y+2 \mid z)$.

Allgemein bedeutet der *Vektor* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ die Verschiebung, die den Punkt $\mathrm{P}\,(x \mid y \mid z)$ in den Punkt $\mathrm{P}'\,(x+a \mid y+b \mid z+c)$ überführt. Vektoren sind also Parallelverschiebungen, die alle Punkte um eine bestimmte Strecke in einer bestimmten Richtung verschieben. Die für die Punkte A, B, C, D, E, F angegebenen Koordinaten können wir auch als Verschiebungen des Nullpunktes O umdeuten, also als Ortsvektoren der entsprechenden Punkte. Es ist also:

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da sich der Vektor $\vec{a}$ zusammensetzt aus einer Bewegung in Richtung der positiven x-Achse und einer Bewegung in Richtung der negativen z-Achse, können wir diesen Vektor auch als Summe darstellen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

wobei das „+"-Zeichen das Nacheinanderausführen der Verschiebungen bedeuten soll. An dieser Gleichung erkennt man: Vektoren werden offensichtlich komponentenweise addiert. Es gilt also die allgemeine Gesetzmäßigkeit

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich auch, dass die Addition von Vektoren kommutativ ist. Es gilt also allgemein:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

Da Vektoren als Pfeile angesehen werden können, bedeutet die Addition geometrisch: Der Pfeil, der den Anfangspunkt des ersten Pfeils mit dem Endpunkt des zweiten Pfeiles verbindet, ist der Pfeil, der die Summe der beiden Vektoren darstellt (siehe Abbildung 2).

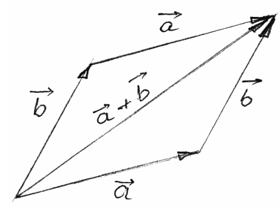

Abbildung 2

Wir können den Vektor $\overrightarrow{FC}$ beschreiben durch $\overrightarrow{FC}=\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$ (siehe Abbildung 1). Wenn wir den Mittelpunkt M hinzunehmen, so erkennt man: $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{MC}$. Es ist also

$$\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, dass gilt

$$\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

Daher ist es naheliegend für beliebige reelle Faktoren k zu setzen:

$$k\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\ka_3\end{pmatrix}$$

d.h.: jede Komponente des Vektors wird einzeln multipliziert. Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl k verändert nur seine Länge auf das k-fache, nicht aber seine Richtung, da die drei Komponenten mit demselben Faktor multipliziert werden. Daher nennt man solche Vektoren $k\cdot\vec{a}$, die sich nur durch einen Faktor k unterscheiden, *kollinear*. Es bedeutet also z.B.

$$-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}$$

Daher ist auch

$$\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{OA}$$

Die Abbildung 1 zeigt auch

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \text{ oder } \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \text{ oder } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

Wir sehen: Man erhält die Komponenten des Vektors, der einen Punkt in einen zweiten Punkt überführt, indem man die Koordinaten des Anfangspunktes von den Koordinaten des Endpunktes abzieht. Daher ist also z.B.:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{c} - \vec{b}$$

und

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{c}$$

und

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \left(\vec{c} - \vec{b}\right) + \left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

In Abbildung 2 erkennt man: die eine Diagonale eines Parallelogramm kann durch $\vec{a} + \vec{b}$, die andere Diagonale durch $\vec{a} - \vec{b}$ dargestellt werden.

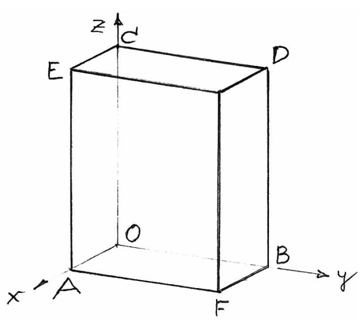

Abbildung 3

Aufgabe: Die Abbildung 3 zeigt einen Quader mit den Ecken A $(2 \mid 0 \mid 0)$, B $(0 \mid 3 \mid 0)$, C $(0 \mid 0 \mid 4)$, D $(0 \mid 3 \mid 4)$, E $(2 \mid 0 \mid 4)$, F $(2 \mid 3 \mid 0)$, G $(2 \mid 3 \mid 4)$ und O $(0 \mid 0 \mid 0)$.

Bestimme die Vektoren $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AD}$ und stelle diese Vektoren mit Hilfe von $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ dar.

Man erhält

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{b},\ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{DE}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -\vec{a} - \vec{c}, \quad \overrightarrow{\mathrm{EB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Trägt man an einen Punkt $\mathrm{P}\,(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ einen Vektor $\vec{u}$ mit den Komponenten u_1, u_2, u_3 an, so erhält man den Punkt $\mathrm{Q}\,(p_1 + u_1 \mid p_2 + u_2 \mid p_3 + u_3)$. Trägt man an Q denselben Vektor $\vec{u}$ noch einmal an, so erhält man den Punkt $\mathrm{P}\,(p_1 + 2u_1 \mid p_2 + 2u_2 \mid p_3 + 2u_3)$. Da Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{\mathrm{PR}}$ ist, erkennt man: die Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke sind die arithmetischen Mittel der Koordinaten der Endpunkte.

Aufgabe: Bestimme die drei Seitenmittelpunkte des Dreiecks ACE von Abbildung 1.

Aus dem Satz des Pythagoras folgt, dass der Abstand der beiden Punkte $\mathrm{A}\,(a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ und $\mathrm{B}\,(b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ – oder die Länge des Vektors $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ – bestimmt wird durch die Formel

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Als Spezialfall gibt diese Formel die Länge eines Vektors an. Wir schreiben

$$\mid \vec{a} \mid = \mid \overrightarrow{\mathrm{OA}} \mid = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Es ist also z.B. der Abstand der beiden Punkte $\mathrm{A}\,(2 \mid 1 \mid 3)$ und $\mathrm{B}\,(4 \mid 2 \mid 1)$ gleich 3 und der Abstand der Punkte $\mathrm{C}\,(0 \mid 3 \mid -1)$ und $\mathrm{D}\,(6 \mid 1 \mid 2)$ gleich 7.

Aufgabe: Zeige, dass das Viereck $\mathrm{A}\,(1 \mid -2 \mid 3)$, $\mathrm{B}\,(5 \mid -2 \mid 8)$, $\mathrm{C}\,(3 \mid 4 \mid 7)$ und $\mathrm{D}\,(-1 \mid 4 \mid 2)$ ein Rhombus ist. Warum ist dieses Viereck kein Quadrat? Berechne die Längen der Diagonalen.

Aufgabe: Zeige mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, dass das Dreieck $\mathrm{A}\,(0 \mid 2 \mid 1)$, $\mathrm{B}\,(2 \mid 5 \mid -1)$, $\mathrm{C}\,(7 \mid 9 \mid 10)$ rechtwinklig ist. (Die Seite AC ist Hypotenuse) – Gilt dies auch für das Dreieck $\mathrm{A}\,(3 \mid 2 \mid 1)$, $\mathrm{B}\,(5 \mid 3 \mid -1)$, $\mathrm{C}\,(3 \mid 4 \mid 2)$?

Aufgabe: Zeige, dass bei dem Tetraeder mit den vier Ecken $\mathrm{A}\,(7 \mid 2 \mid 4)$, $\mathrm{B}\,(1 \mid 0 \mid 1)$, $\mathrm{C}\,(1 \mid 5 \mid 6)$ und $\mathrm{D}\,(5 \mid -1 \mid 10)$ drei Kanten einer Ecke gleiche Länge haben.

Aufgabe: Spiegele die Punkte $\mathrm{P}\,(4 \mid 1 \mid 3)$ und $\mathrm{Q}\,(2 \mid 3 \mid 2)$ am Punkt $\mathrm{A}\,(2 \mid 3 \mid 1)$. Man erhält die Punkt P′und Q′. Zeige: $\mid \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \mid = \mid \overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} \mid$. Hinweis: Der Punkt A ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{\mathrm{PP'}}$ und der Strecke $\overline{\mathrm{QQ'}}$.

Aufgabe: Die beiden Punkte A, B haben die Koordinaten A $(3 \mid -1 \mid 2)$ und B $(5 \mid a \mid -a)$. Bestimme die reelle Zahl a so, dass $\mid \mathrm{AB} \mid = 3$ ist.

Es ist

$$\mid \overrightarrow{\mathrm{AB}} \mid^2 = (5-3)^2 + (a+1)^2 + (2+a)^2 = 9 + 6a + 2a^2$$

Aus $\mid \overrightarrow{\mathrm{AB}} \mid^2 = 9$ folgt dann $a = 0$ oder $a = -3$.

Aufgabe: Zeige, dass die Punkte $\mathrm{P}_1\,(0 \mid 0 \mid 0)$, $\mathrm{P}_2\,(0 \mid 3 \mid 3)$, $\mathrm{P}_3\,(1 \mid 7 \mid 2)$, $\mathrm{P}_4\,(2 \mid 8 \mid -2)$, $\mathrm{P}_5\,(2 \mid 5 \mid -5)$, $\mathrm{P}_6\,(1 \mid 1 \mid -4)$ ein regelmäßiges Sechseck bilden. Zeige auch dass gilt: $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_4} = \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_5} = \overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_6}$ und $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_4} = \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} + \overline{\mathrm{P}_6\mathrm{P}_5}$.

Die Geradengleichung

Addiert man in Abbildung 1 zum Vektor $\vec{a}$ den Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, so erhält man den Vektor $\vec{b}$: $\vec{b} = \vec{a} + \vec{u}$. Trägt man dann den Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ noch einmal an den Punkt B an, so entsteht der Punkt B_1 (siehe Abbildung 4). Es ist daher $\overrightarrow{\mathrm{OB}_1} = \vec{b} + \vec{u} = \vec{a} + 2\vec{u}$.

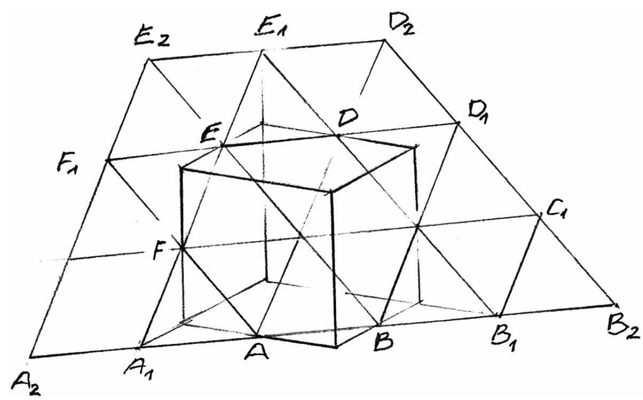

Abbildung 4

Wenn wir den Vektor $\vec{u}$ noch einmal an den Punkt B_1 antragen, erhalten wir den Punkt B_2. Es ist daher $\overrightarrow{\mathrm{OB}_2} = \vec{a} + 3\vec{u}$. Für die Punkte A_1 und A_2 gilt: $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} = \vec{a} - \vec{u}$ und $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = \vec{a} - 2\vec{u}$. Wenn wir dies Verfahren verallgemeinern, ergibt sich: Wenn t eine beliebige reelle Zahl ist, so stellt der Vektor $\vec{x}$ mit

$$\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \vec{a} + t \cdot \vec{u} = \vec{a} + t\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \tag{1}$$

den Ortsvektor eines Punktes X der Geraden AB dar. Für $t = 0$ erhält man den Punkt A, für $t = 1$ den Punkt B. Für $t = \frac{1}{2}$ ergibt sich der Mittelpunkt der Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$. Die Gleichung (1) stellt also eine *Gleichung für die Gerade* AB dar. Den Vektor $\vec{a}$ nennt man Stützvektor, den Vektor $\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}$ nennt man *Richtungsvektor* der Geraden. Als *Stützvektor* kann man den Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Geraden nehmen. Die