

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	vi
Symbole in den Zeichnungen	vii
Vokabular	viii
Einleitung	1
Einführung der Fernelemente	2
Dreiecksverwandlung	5
Die Grundgebilde in Ebene und Raum	7
Grundgebilde mit uneigentlichem Träger	9
Die Axiome der projektiven Geometrie	12
Inzidenzaxiome	13
Reichhaltigkeitsaxiome	14
Dualitätsprinzip	15
Anordnungs- oder Trennungsaxiome	16
Stetigkeitsaxiom	17
Das Halbkugelmodell der projektiven Ebene	18
Die Trennungsrelation	19
Gliederung der Ebene	23
Gliederung der Punkte der Ebene durch n Geraden	23
EULER'SCHE Formel	27
Gliederung der Geraden der Ebene durch n Punkte	28
Gliederung der Punkte im Raum durch Ebenen	30
Gliederung der Ebenen durch Punkte	31
Gliederung der Geraden durch Geraden	31
Sätze über Punktgebiete und Geradenbereiche	32
Dreiecks- und Vierecks- Lage von vier Punkten	36
Der Satz von DESARGUES	38
MOULTON-Ebene	41
Gerade durch einen unzugänglichen Punkt	42
vollständiges Viereck / Vierseit und harmonische Lage	43
Harmonische Lage	45
Die harmonische 13er-Konfiguration	47
Konstruktion einer Geraden durch einen unzugänglichen Punkt	50
Sonderfälle der harmonischen Lage	50
Harmonische Lage und Doppelverhältnis	52
Harmonische Lage und Goldener Schnitt	53
Räumliche Konfigurationen	54
Das vollständige Hexaeder	54
Das vollständige Oktaeder	56
Die REYE-Konfiguration	57
Projektive Abbildungen	59
Perspektive Abbildungen	59
Projektive Abbildungen	62
Fundamentalsatz (Hauptsatz) der projektiven Geometrie	63
Kennzeichnung von Perspektivitäten	64

Kreuzpunkt- und Kreuzliniensatz.....	65
Satz von PAPPOS	66
Projektive Abbildungen auf sich	67
Beweis des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie	70
MÖBIUS'sches Netz	70
Rationale Punkte.....	71
Das Doppelverhältnis	76
Teilverhältnis	76
Doppelverhältnis.....	77
Projektive Erzeugung der Kegelschnitte	81
Projektive Erzeugung von Kreisen	87
Sätze von PASCAL und BRIANCHON.....	89
Pol und Polare	96
Hauptsatz der Polarentheorie.....	99
Pol, Polare und harmonische Lage	100
Punktreihen und Geradenbüschel 2. Ordnung stimmen überein	104
Pol und Polare – analytisch	105
Involutionen	109
Rechtwinkel-Axiom	112
2. Satz von DESARGUES.....	114
Involutionssatz vom vollständigen Viereck, Vierseit.....	115
Involutionen auf einem Kegelschnitt.....	116
STEINER'sche Fixpunktkonstruktion	118
Projektive Skalen.....	119
Additive oder arithmetische Skala.....	119
Multiplikative oder geometrische Skala	120
Periodische Skala.....	121
Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte	122
Mittelpunkte und Durchmesser	122
Konjugierte Punkte und Geraden	123
Achsen, Brennpunkte und Leitgeraden	126
Gleichungen der Mittelpunktkegelschnitte.....	130
Gleichung der Parabel	131
Büschel von Kegelschnitten	132
Büschel mit vier verschiedenen Trägerpunkten	132
Verschiedene Typen von Kegelschnittsbüscheln	137
Analytisches	138
Büschel mit zusammenfallenden Trägerpunkten	142
Kreisbüschel	144
Durch vier Tangenten bestimmte Büschel.....	145
Konstruktionsaufgaben für Kegelschnitte	146
Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit einer Geraden	146
Krümmungskreise.....	147
Scheitelkrümmungskreise.....	149
Krümmungskreise von Kegelschnitten – aus der Büscheltheorie	150
Parabel aus zwei Linienelementen	153

Projektive Erzeugung der Flächen 2. Ordnung im Raum	155
Kegel 2. Ordnung	155
Regelflächen 2. Ordnung.....	156
Flächen 2. Ordnung, die keine Geraden enthalten, Quadriken.....	158
Pol, Polare, Polarebene.....	160
Kurven 3. Ordnung.....	162
Die räumliche C^3	162
Ebene Kurven 3. Ordnung.....	164
Die ebene c^3 als Schnitt eines Kegelschnitts- und eines Geradenbüschels	165
Rationale Kubiken c_0^3	169
Klassische Konstruktionen von Kurven 3. Ordnung.....	173
Die topologische Struktur der projektiven Ebene	174
MÖBIUS'sches Band, einseitige Fläche	175
Das Heptaeder.....	177
Übergang zur affinen und EUKLIDischen und zur nichteuklidischen Geometrie	181
Affine Geometrie.....	181
Ähnlichkeitsgeometrie oder EUKLIDische Geometrie.....	182
Polareuklidische Geometrie.....	183
Hyperbolische Geometrie.....	183
Elliptische Geometrie	188
Pseudoeuklidische Geometrie	188
Noch einmal: EUKLIDische Geometrie.....	189
Zentralkollineationen anschaulich.....	191
Die Perspektive.....	191
Die Zentralprojektion	193
Konstruktion perspektivischer Bilder von räumlichen Objekten	195
Die Zentralkollineation als Hilfsmittel zu Konstruktion perspektiver Bilder	197
Zentralkollineationen – axiomatische Einführung	198
Eigenschaften der Zentralkollineationen.....	203
Grundkonstruktionen.....	203
Die Abbildungsgleichungen der Zentralkollineation	205
Involutorische Zentralkollineationen	207
Kegelschnitte, die als Ganzes festbleiben.....	208
Anwendung von involutorischen Zentralkollineationen für Kegelschnittssätze.....	209
Sonderfälle der Zentralkollineation.....	211
Schrägspiegelung, Achsenspiegelung	211
Punktspiegelung	212
Scherung, Parallelverschiebung.....	212
Achsenaffinitäten.....	213
Zentrische Streckung.....	213
Homogene Koordinaten	214
Homogene Koordinaten im 3-dimensionalen Raum	216
Zentralkollineationen in homogenen Koordinaten.....	218
Matrizen und Determinanten.....	220
Multiplikation von Matrizen.....	222
Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit.....	222
Determinanten	223
Berechnung der Inversen.....	225

Projektive Geometrie in Matrizen-Darstellung	228
Grundaufgaben in der Ebene	229
Grundaufgaben im Raum.....	230
Darstellung von Zentralkollineationen durch Matrizen.....	234
Darstellung von allgemeinen projektiven Abbildungen durch Matrizen	235
Berechnung von Fixpunkten und Fixgeraden.....	236
Affine Abbildungen und homogene Koordinaten	239
Kegelschnitte und Matrizen.....	244
Zusammenhang mit den Korrelationen, insbesondere den Polaritäten	245
Tangenten- und Polarengleichungen	246
Zerfallende Kegelschnitte.....	248
Beispiele	249
Allgemeine Eigenschaften.....	252
Senkrecht-Stehen und Rechtwinkel-Involution.....	253
Allgemeine projektive Transformationen	254
Der Fall $n = 1$	255
Der Fall $n = 2$	257
Beispiele für räumliche Kollineationen.....	261
Berechnung von Fixgeraden im Raum.....	266
Freie Geometrie ebener Kurven	268
Einfache Bewegung, elementare Bewegung	270
Einfacher Bogen	272
Elementarer Bogen, Elementarkurve.....	273
Lokale Singularitäten.....	273
Reguläre und lokal singuläre Elemente mit Fernelementen als Träger.....	275
Vergleich mit der analytischen Behandlung.....	277
Die Struktur des einfachen Bogens	281
Globale Singularitäten	288
C-Bogen und die Ei-Linie.....	288
Weitere Eigenschaften der Singularitäten	290
Elementarkurven.....	294
Form und Gegenform	295
Sätze über Elementarkurven.....	302
Elementarkurven 3. Ordnung und 3.Klasse.....	303
Weiteres, wovon hier nicht mehr gesprochen werden kann.....	307
Anwendungen.....	310
Historische Bemerkungen	311
Die projektive Geometrie als Unterrichtsgebiet an der Waldorfschule	316
Aufgaben	320
Schluss.....	332
Literaturverzeichnis.....	333
Register	335